

## **CAPITULO III: CAPACIDAD DEL CANAL MIMO**



**Miguel Ángel Lagunas, Ana I. Pérez-Neira**

## **CAPITULO III: CAPACIDAD DEL CANAL MIMO.**

<b>III.1. INTRODUCCION.....</b>	<b>3.3</b>
<b>III.2. INFORMACION MUTUA.....</b>	<b>3.3</b>
<b>III.3. CAPACIDAD EN CANAL MIMO.....</b>	<b>3.6</b>
<b>III.4. CAPACIDAD CON CSI.....</b>	<b>3.8</b>
<b>III.5. CAPACIDAD SIN CSI EN Tx.....</b>	<b>3.12</b>
<b>III.6. CAPACIDAD ERGODICA Y OUTAGE..</b>	<b>3.14</b>
<b>III.7. CONCLUSIONES.....</b>	<b>3.15</b>
<b>III.8. REFERENCIAS.....</b>	<b>3.15</b>

### III.1. INTRODUCCION.

En el capítulo anterior se ha presentado la transmisión de un solo símbolo a través de un canal MIMO. El caso presentado cifra sus objetivos en la obtención de máxima calidad a nivel de capa física, es decir, en términos de probabilidad de error. Dentro de los resultados, nuestro interés ahora es la forma tan desfavorable que el sistema escalaba la tasa de error en función del número de bits o streams básicos a transmitir  $n_s$ . Obviamente este escalado de tipo potencial era independiente de si se disponía o no de CSI ya que dependía de principios básicos de comunicaciones y en concreto de la forma en que, manteniendo una distancia constante entre puntos en una constelación igual a  $\sqrt{E_s}$ , crecía la energía media transmitida por símbolo  $E_T$ . La expresión de la tasa de error se reproduce aquí a continuación para el caso de CSI perfecto.

$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{2 \cdot E_T}{N_0} \cdot I_{\max}(\underline{R}_H) \cdot \left( \frac{3}{(2^{n_s} - 1)} \right)} \right) \quad (\text{III.1})$$

El interés en este capítulo será el encontrar los límites que el canal MIMO presenta en términos de número de streams o bits por acceso al canal. Una vez encontrados se abordará el problema de cómo diseñar el sistema para estar cerca de estos límites, acomodando el transmisor al canal.

Dos conceptos resultaran cruciales en el desarrollo. El primero es que, por primera vez, el diseño del procesador espacio temporal visualizara al lector las tres etapas que se mencionaron en el primer capítulo. Estas tres etapas, como recordara, eran diseño de constelación, asignación de potencia y procesador espacial. El segundo, será la importancia que tiene la constelación espacio temporal que se realiza en el transmisor. En concreto, podrá concluirse que el empaquetamiento de todos los streams en un solo símbolo, al igual que se hizo en el capítulo anterior, rara vez resulta ser el mejor procedimiento ni en tasa de error ni en velocidad de información.

El capítulo comienza con una noción de información mutua en comunicaciones para continuar con el análisis, en varios pasos, de la capacidad de un canal MIMO.

### III.2. INFORMACION MUTUA.

Considerando el sistema de transmisión de la Figura III.1, donde el vector  $\underline{X}$  es la señal transmitida de  $n_T$  componentes, la matriz  $\underline{H}$  es la del canal MIMO considerado con fading de  $n_R \cdot n_T$  entradas, e  $\underline{Y}$  es la señal recibida, la información mutua entre la señal transmitida y la recibida viene dada por (III.2).

$$I(\underline{X}, \underline{Y}) = \iint f(\underline{X}, \underline{Y}) \cdot \ln \left[ \frac{f(\underline{X}, \underline{Y})}{f(\underline{X}) \cdot f(\underline{Y})} \right] \cdot d\underline{X} d\underline{Y} \quad (\text{III.2})$$

Donde  $f(\cdot)$  denota la distribución de probabilidad.

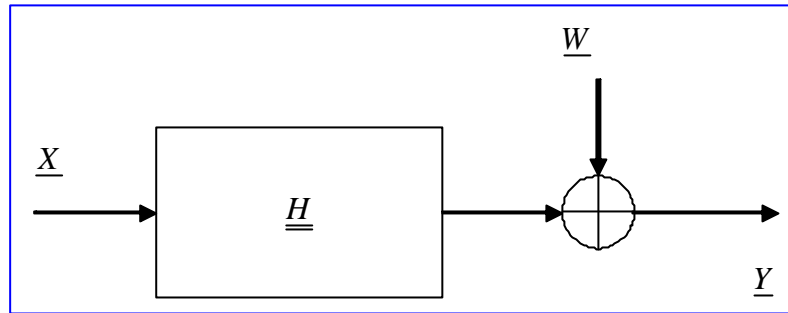


Figura III.1. Esquema de sistema de transmisión MIMO.

La expresión de la información mutua resulta complicada manipular, pasando de distribuciones a parámetros físicos, si no se asume una distribución gaussiana para señal transmitida y ruido. Es claro que la suposición de ruido gaussiano y de media nula no está lejos de la realidad; lo que no es obvio es que la señal transmitida siga este tipo de distribución. Tan solo en los casos de un proceso lineal o no lineal temporal de los streams originales podría, en base a la convergencia a la gaussianidad, soportar la suposición que se realizara. En cualquier caso, la dificultad de manejar otra suposición obliga al uso de lo que se denomina codificación gaussiana para la señal transmitida. También es cierto que las conclusiones y formas de hacer y diseñar que se derivaran de esta suposición tienen una validez muy amplia, aun cuando la distribución de la señal transmitida esté lejos de la gaussiana. Mas interesante, puede demostrarse que la información mutua es máxima cuando la distribución es gaussiana, así pues, sin ser cierta lo que se obtendría es una cota superior o el máximo de la información mutua que es lo que denominaremos capacidad del canal MIMO y denotaremos por  $C$ .

así pues se supondrá la gaussianidad para señal transmitida y ruido con las siguientes matrices de covarianza para cada una de ellas:

$$\underline{X} = G(\underline{0}, \underline{Q}) \quad \underline{W} = G(\underline{0}, \underline{R}_0) \quad (\text{III.3})$$

Al proseguir, es interesante notar los dos términos básicos que componen una distribución gaussiana. Tomando, por ejemplo, la de la señal transmitida, existe un término correspondiente al determinante de la inversa de la matriz de covarianza que no depende de las variables de integración y otro que depende de las variables de integración en su exponente.

$$\Pr(\underline{X}) = \det(\underline{Q}^{-1}) \cdot \exp\left\{-\left(\underline{X}^H \cdot \underline{Q} \cdot \underline{X}\right)\right\} \quad (\text{III.4})$$

Lo que da lugar a dos términos que corresponden al determinante y al exponente. En esta expresión se ha usado que el determinante de la inversa es la inversa del determinante y el hecho de que el cociente elimina los términos que no son cruzados entre señal transmitida y señal recibida.

$$C = \iint f(\underline{X}, \underline{Y}) \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\det[\underline{Q}] \cdot \det[\underline{R}_{yy}]}{\det \begin{pmatrix} \underline{Q} & \underline{R}_{xy} \\ \underline{R}_{yx} & \underline{R}_{yy} \end{pmatrix}} \right] d\underline{X} d\underline{Y} + \quad (\text{III.5})$$

$$- \iint f(\underline{X}, \underline{Y}) \cdot \left[ \underline{X}^H \underline{R}_{xy} \underline{Y} + \underline{Y}^H \underline{R}_{yx} \underline{X} \right] d\underline{X} d\underline{Y}$$

El primer termino la integración se consume en el logaritmo del cociente de determinantes; mientras que, el segundo termino al ser ambos vectores de media nula es idéntico a cero.

$$C = \text{Ln} \left[ \frac{\det[\underline{Q}] \cdot \det[\underline{R}_{yy}]}{\det \begin{pmatrix} \underline{Q} & \underline{R}_{xy} \\ \underline{R}_{yx} & \underline{R}_{yy} \end{pmatrix}} \right] \quad (\text{III.6})$$

Teniendo ahora presente la siguiente propiedad:

$$\det \begin{pmatrix} \underline{Q} & \underline{R}_{xy} \\ \underline{R}_{yx} & \underline{R}_{yy} \end{pmatrix} = \det[\underline{Q}] \cdot \det \left[ \underline{R}_{yy} - \underline{R}_{yx} \underline{Q}^{-1} \underline{R}_{xy} \right]$$

La capacidad puede simplificarse a (III.7), donde se aprecia que, entiendo el determinante como una medida de la energía o potencia de la matriz correspondiente, se esta ante una especie de relación entre señal recibida y la parte de la recibida que no corresponde a la señal transmitida. Esta noción de SNR en la expresión de la capacidad se vera con mas claridad en un momento.

$$C = \text{Ln} \left[ \frac{\det[\underline{R}_{yy}]}{\det \left[ \underline{R}_{yy} - \underline{R}_{yx} \underline{Q}^{-1} \underline{R}_{xy} \right]} \right] \quad (\text{III.7})$$

Al proseguir, teniendo en cuenta que el ruido acostumbra a estar incorrelado con la señal transmitida, la covarianza de la señal recibida y las cruzadas pueden escribirse como se indica en (III.7).

$$\begin{aligned} \underline{R}_{yy} &= \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H + \underline{R}_0 \\ \underline{R}_{xy} &= \underline{Q} \underline{H}^H \\ \underline{R}_{yx} &= \underline{H} \underline{Q} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Con lo que, efectivamente el denominador de la capacidad es simplemente una medida del ruido recibido. Todo ello permite simplificar aun mas la expresión de la capacidad como se indica en (III.8).

$$C = Ln \left[ \frac{\det \left[ \underline{\underline{R}}_0 + \underline{\underline{H}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{H}}^H \right]}{\det \left[ \underline{\underline{R}}_0 \right]} \right] = Ln \left( \det \left[ \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{R}}_0^{-1} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{H}}^H \right] \right) \quad (III.8)$$

Esta ultima expresión, la mas sencilla de manejar es la que se usara en todo lo que resta del capítulo. Es interesante destacar ahora que la capacidad depende tan solo de la matriz de covarianza de la señal transmitida, de la del ruido y de la matriz del canal. También es importante normalizar la participación de estas tres señales en la capacidad. En primer lugar, en general y salvo en entornos multiusuario o presencia de interferencia co-canal se supondrá ruido blanco de energía  $N_0$ . Con respecto a señal transmitida consideraremos ambas matrices normalizadas a su traza, es decir,

$$C = Ln \left( \det \left[ \underline{\underline{I}}_{n_r} + \left( \frac{E_T \text{Traza}(\underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{H}})}{N_0} \right) \underline{\underline{H}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{H}}^H \right] \right) \quad (III.9)$$

Donde la línea de puntos indica la normalización, es decir,  $\underline{\underline{Q}} = \frac{\underline{\underline{Q}}}{\text{Traza}(\underline{\underline{Q}})} = \underline{\underline{Q}} / E_T$ .

Por ultimo destacar que la capacidad puede también escribirse en términos de la dimensión de la apertura del receptor en lugar de la del transmisor. Las dos expresiones mostradas en (III.10) son validas y pueden usarse a conveniencia.

$$C = Ln \left( \det \left[ \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{R}}_0^{-1} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{H}}^H \right] \right) = Ln \left( \det \left[ \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{R}}_0^{-1} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{Q}} \right] \right) \quad (III.10)$$

La segunda de estas expresiones es muy interesante y merece destacar que la suposición de ruido blanco no es necesaria a efectos de diseño si el canal se considera que incluye la contribución del ruido.

$$\underline{\underline{H}} \rightarrow \underline{\underline{R}}_0^{-1/2} \underline{\underline{H}} \quad \underline{\underline{R}}_H = \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{R}}_0^{-1} \underline{\underline{H}} \quad (III.11)$$

Esta consideración es siempre correcta en todo lo que se expone en este curso, por lo que en todo lo que sigue se considerara el ruido blanco pues, en el caso de no serlo, abr de incluirse su contribución como se ha indicado en la expresión anterior.

### III.3. CAPACIDAD EN CANAL MIMO.

La expresión de la capacidad de un canal MIMO ofrece una visión muy interesante sobre los beneficios, en términos de velocidad (rate), que ofrece el empleo de diversidad en uno o ambos extremos del canal de transmisión. A continuación se examinara de manera breve esta visión. Para simplificar la presentación, y con el fin de

establecer una base de comparación, se supondrá que el transmisor emplee UPA (Uniform Power Allocation) directamente a los streams a transmitir, es decir, se supondrá que la matriz de covarianza del transmisor, ya normalizada a la energía transmitida es igual a la matriz unidad dividida por el número de antenas transmisoras. De este modo, la expresión de la capacidad que se va a utilizar es:

$$C = \text{Ln} \left( \det \left[ \frac{I}{n_r} + \frac{\mathbf{g}}{n_t} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right] \right) \quad (\text{III.12})$$

$$\text{con } \mathbf{g} = \frac{E_T \text{Traza}(\mathbf{H}^H \mathbf{H})}{N_0}$$

Nótese que con el parámetro  $\mathbf{g}$  queda normalizada la comparación que prosigue.

El primer caso de referencia será el de un canal SISO, es decir sin diversidad espacial en ambos extremos del sistema de transmisión. En este caso la capacidad será (III.13).

$$C_{SISO} = \text{Ln}[1 + \mathbf{g}] \quad (\text{III.13})$$

Si analizamos la misma expresión para el caso de un canal MISO o SIMO la expresión de la capacidad pasa a ser la expresada en (III.14).

$$C_{MISO} = \text{Ln} \left[ 1 + \frac{\mathbf{g}}{n_t} \mathbf{h}^H \mathbf{h} \right] \quad (\text{III.14})$$

$$C_{SIMO} = \text{Ln} \left[ 1 + \mathbf{g} \mathbf{h}^H \mathbf{h} \right]$$

Las conclusiones son sorprendentes y han de matizarse pero las anotamos. A igualdad de energía transmitida y con una canal igual la capacidad decrece (!) si se añaden antenas en el transmisor y no se altera si se añaden en el receptor con respecto al canal SISO. Es decir, parece que a la capacidad no le sienta bien la diversidad en uno solo de sus extremos. Dos matices corrigen esta desoladora conclusión y cada uno de los matices tiene una carga de razón diferente. El primer matiz, poco razonable, es considerar que si se tienen, digamos cuatro antenas, se transmite cuatro veces más potencia, lo que deja en empate el canal MISO y el SIMO y ambos iguales, insistimos en términos de capacidad al canal sin diversidad o SISO.

Para igual energía

por antena

e igual canal en su traza

$$C_{MISO} = C_{SIMO} = \text{Ln}[1 + \mathbf{g}] \quad (\text{III.15})$$

Este matiz no es muy correcto ya que una de las defensas de instalar diversidad espacial es el reducir su impacto en el medio ambiente, es decir no modificar la energía total. Así pues, parece lógico mantenerse en (III.14) ya que no deseamos incrementar potencia transmitida.

El segundo matiz es más importante y más cargado de razón. La normalización de la traza no parece justa ya que cuatro canales físicos deberían presentar una traza cuatro veces mayor. Con este matiz las capacidades en (III.14) pasan a ser las de (III.16). Se llega pues a la conclusión de que no es nada rentable incrementar tan solo en el transmisor el número de antenas y si lo es en el receptor aunque escala de manera logarítmica. Si el lector lo piensa vera cuán lógica resulta esta conclusión.

$$\begin{aligned} C_{MISO} &= Ln[1 + \mathbf{g}] \\ C_{SIMO} &= Ln[1 + \mathbf{g} \cdot n_R] \end{aligned} \quad (III.16)$$

El escenario cambia totalmente para cuando ambos, transmisor y receptor disponen de diversidad espacial. En este caso, la matriz del canal  $\underline{\underline{R}}_H$  no será de rango uno y puede llegar a tener  $\min(n_T, n_R)$  autovalores diferentes de cero. Ahora la capacidad será (III.17), con la condición de que todos los autovalores suman

$$C = \sum_{q=1}^{\min(n_T, n_R)} Ln \left[ 1 + \frac{E_T \cdot \sum \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{I}_q}{N_0 \cdot n_T} \right] \quad (III.17)$$

Más aun, suponiendo que todos los autovalores son iguales, la capacidad toma una expresión que alienta al uso de diversidad en ambos extremos.

$$C = \min(n_T, n_R) \cdot Ln \left[ 1 + \frac{E_T \cdot \min(n_T, n_R)}{N_0 \cdot n_T} \right] \quad (III.18)$$

La expresión revela que lo importante es conseguir el mayor rango para la matriz de canal. De hecho hacer que el mínimo número de antenas suba, igual en el mejor caso en ambos extremos, incrementa la capacidad del enlace linealmente y todo sin incremento de ancho de banda de transmisión. Sin duda, en este segundo extremo, salvo polarización de dimensión dos, ningún otro tipo de diversidad brinda tanta mejora y representa un dominio sin fronteras para el incremento de velocidad en futuros y no tan futuros sistemas de comunicaciones.

#### III.4. CAPACIDAD CON CSI.

En este apartado se tratará de diseñar el procesador del transmisor para obtener la mayor capacidad posible. Reproducimos a continuación la expresión que se desea maximizar. Obviamente máxima para una energía transmitida dada. De las tres expresiones emplearemos la última por claridad en la presentación.

$$\begin{aligned} C &= Ln \left( \det \left[ \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{R}}_0^{-1} \underline{\underline{H}} \right] \right) = Ln \left( \det \left[ \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{H}}^H \underline{\underline{R}}_0^{-1} \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{Q}} \right] \right) = \\ C &= Ln \left( \det \left[ \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}_H \right] \right) \end{aligned} \quad (III.19)$$

Antes de proseguir, consideraremos que la matriz de canal tiene  $\min(n_T, n_R)$  autovalores diferentes de cero y su SVD es la que sigue:



$$\underline{\underline{R}}_H = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}}^H \quad \text{con} \quad \text{diag} \underline{\underline{D}}_H = \frac{1}{N_0} \left[ \mathbf{I}_{H1} \quad \dots \quad \mathbf{I}_{H \min(n_T, n_R)} \right] \quad (\text{III.20})$$

Como veremos, en todos los diseños para canal MIMO multi-stream existen tres pasos marcados y diferenciados entre si. El primer paso le denominaremos estructural y se refiere al diseño del procesador espacial, el segundo será de distribución de potencia PA (Power Allocation) y el ultimo será de diseño de constelación o AM (Adaptive modulation). Cada uno de estos diseños condiciona las matrices  $\underline{\underline{U}}$ ,  $\underline{\underline{P}}$ , y  $\underline{\underline{V}}$  que se describieron en el primer capítulo y que se reproducen en la Figura III.2.

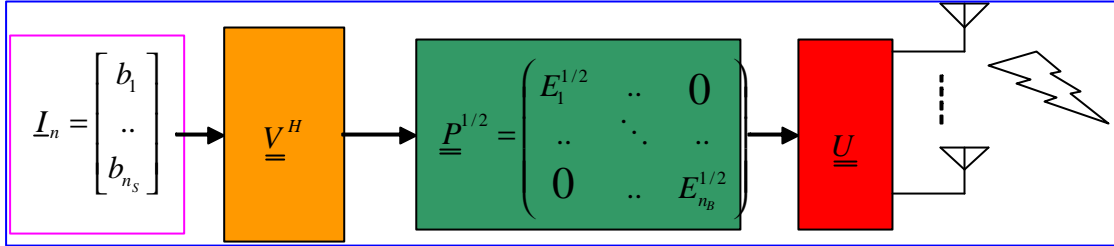


Figura 3.2 Esquema del procesados espacio-temporal del transmisor MIMO.

El primer diseño, denominado estructural, se refiere al procesador espacial. Para su diseño basta recordar la propiedad que establece que el determinante de una matriz definida positiva es siempre menor o igual que el producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\det(\underline{\underline{A}}) \leq \prod A_{ii} \quad (\text{III.21})$$

La igualdad, es decir, el máximo del determinante se obtiene cuando la matriz es diagonal. Trasladando esta propiedad a la maximización de la capacidad, es claro que el máximo del determinante se consigue cuando, por diseño, la matriz de covarianza de la señal transmitida diagonaliza el canal. En consecuencia, si  $\underline{\underline{B}}$  es la matriz de proceso del transmisor, entonces:

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^H \quad (\text{III.22})$$

Como la matriz de proceso esta formada por las tres etapas de la Figura 3.2, se verificara (III.23),

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^H = (\underline{\underline{U}} \underline{\underline{P}}^{1/2} \underline{\underline{V}}^H) \cdot (\underline{\underline{U}} \underline{\underline{P}}^{1/2} \underline{\underline{V}}^H)^H = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{U}}^H \quad (\text{III.23})$$

De donde se concluye que el procesador espacial del transmisor esta formado por los autovectores de la matriz del canal. Es decir, el procesador diagonaliza el canal y reduce este a los eigenmodos o canales sin ISI entre ellos y de ganancia el autovalor correspondiente.

Después de decidir el diseño de  $\underline{\underline{U}}$  como (III.24),

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}_H \quad (\text{III.24})$$

La expresión de la capacidad pasa a ser (III.25).

$$C = Ln \left( \det \left[ \underline{I}_{=n_T} + \frac{1}{N_0} \underline{U}_{=H} \cdot \underline{P}^{1/2} \cdot \underline{V}_{=}^H \cdot \underline{V}_{=} \cdot \underline{P}^{1/2} \cdot \underline{D}_{=} \cdot \underline{U}_{=}^H \right] \right) = \tag{III.25}$$

$$C = Ln \left( \det \left[ \underline{I}_{=\min(n_T, n_R)} + \frac{1}{N_0} \underline{P}^{1/2} \cdot \underline{V}_{=}^H \cdot \underline{V}_{=} \cdot \underline{P}^{1/2} \cdot \underline{D}_{=H} \right] \right)$$

Aunque aparentemente inocuo el paso dado ha hipotecado estructuralmente el procesador del transmisor. La matriz de proceso  $\underline{U}$  han de ser los autovectores de la matriz del canal. Por otro lado, en relación con la matriz de constelación, ha de exigirse que esta sea diagonal, es mas, si consideramos que toda la power allocation se realizara en la matriz  $\underline{P}$ , la maximización estructural de la capacidad también exige (III.26).

$$\underline{V}_{=}^H \cdot \underline{V}_{=} = \underline{I}_{=n_T} \tag{III.26}$$

Des pues de estos pasos el diseño del máximo de la capacidad, ahora ya reducida al determinante de una matriz diagonal que contiene las entradas de  $\underline{P}$  por las entradas de  $\underline{D}_{=H}$ , sujeto todo el proceso a una energía transmitida constante.

$$C = Ln \left( \det \left[ \underline{I}_{=\min(n_T, n_R)} + \frac{1}{N_0} \underline{P}^{1/2} \cdot \underline{V}_{=}^H \cdot \underline{V}_{=} \cdot \underline{P}^{1/2} \cdot \underline{D}_{=H} \right] \right) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\min(n_T, n_R)} Ln \left[ 1 + \frac{1}{N_0} z(q) \cdot \underline{I}_H(q) \right] \Bigg|_{MAX} \tag{III.27}$$

sujeto a  $\sum_{q=1}^{\min(n_T, n_R)} z(q) = E_T$

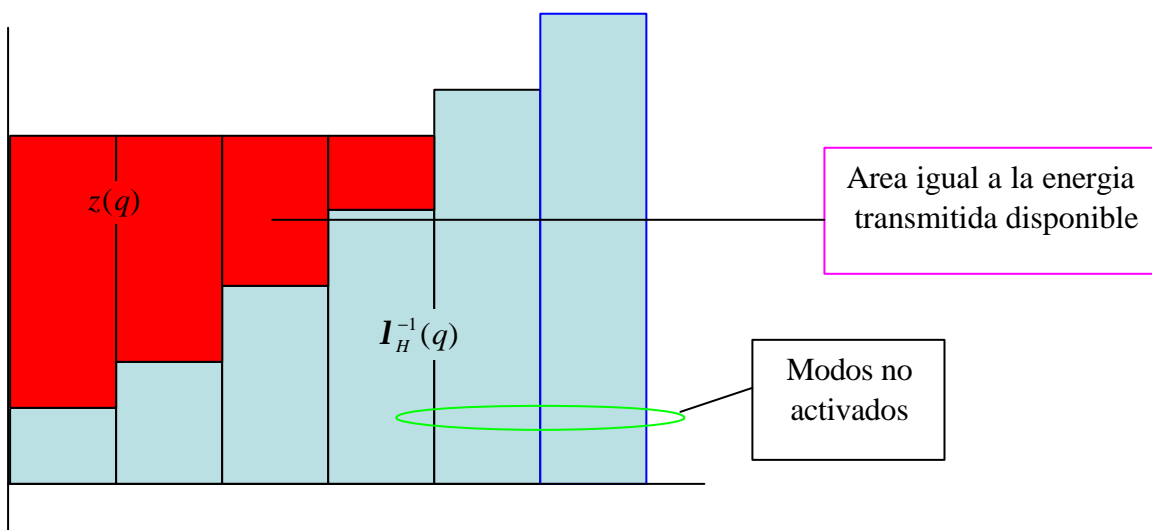


Figura 3.2 Algoritmo de Water-Filling o distribución óptima de potencia por cada eigenmode

La solución a este problema es la formación del lagrangiano con la restricción de energía y multiplicador de Lagrange, derivar e igualar a cero:

$$\Delta = \sum_{q=1}^{\min(n_T, n_R)} \text{Ln} \left[ 1 + \frac{1}{N_0} z(q) \cdot \mathbf{I}_H(q) \right] - m \cdot \left( \sum_{q=1}^{\min(n_T, n_R)} z(q) = E_T \right) \quad (\text{III.28})$$

$$\partial \Delta = 0 = \frac{1}{N_0} \frac{\mathbf{I}_H(q)}{1 + z(q) \cdot \mathbf{I}_H(q)} - m \Rightarrow z(q) = \left[ m - \frac{1}{\mathbf{I}_H(q)} \right]^+$$

Donde  $[\cdot]^+$  denota una función que toma el valor de su argumento si es positivo y cero si no es negativo. El parámetro  $\mu$  asegura que los  $z(q)$  activados suman la energía disponible.

La solución encontrada revela que de todos los eigenmodes que presenta el canal no todos van a ser utilizados, de hecho, tan solo cuando la energía transmitida disponible sea elevada entonces se activaran todos los modos. En esta línea hay dos situaciones que tienen un interés especial. La primera es aquella en la que solo un modo se activa. Al activarse solo el modo correspondiente al autovector máximo, la capacidad resulta ser:

$$\mathbf{m} = E_T + \frac{1}{\mathbf{I}_{H, \max}}; z(0) = E_T \quad (\text{III.29})$$

$$C_{\text{BEAMFORMING}} = \text{Ln} \left[ 1 + \frac{E_T}{N_0} \cdot \mathbf{I}_{H, \max} \right]$$

Lo mas destacable es que, al tener la matriz de potencias un solo elemento distinto de cero, de la matriz  $\underline{\mathbf{U}}$  tan solo se activara una columna. Es decir, el procesador del transmisor es simplemente el autovector máximo y, estructuralmente es un solo conformador de haz. Esta es la razón por la que en el subíndice de la formula anterior se ha puesto beamforming. La situación de un solo modo activado se dará cuando se verifique (III.30).

$$\mathbf{I}_2 < (n_T - 1) \cdot \left[ E_T + \frac{1}{\mathbf{I}_1} \right] \quad (\text{III.30})$$

Es importante, antes de dejar este apartado el señalar que, para valores razonables de energía transmitida en radio-comunicaciones (no en ADSL), si el canal MIMO presenta niveles moderados de correlación o es completamente incorrelado la solución es UPA (Uniform power allocation). Solo en el caso de canal MIMO fuertemente correlado con angular spread por debajo de los ocho grados la solución optima de capacidad es beamforming o un solo modo activado. La bondad de UPA tanto para perfecto como para nulo CSI se vera en el próximo apartado.

### III.5 CAPACIDAD SIN CSI EN TX.

En el caso de no disponer de CSI la solución se ha de buscar del mismo modo que se realizó en el capítulo II. Básicamente se trata de contemplar el problema como un juego entre el transmisor y el canal. En este caso, el juego será de múltiples jugadas por parte de ambos. Imaginemos, es irrelevante para la solución final, que el diseñador realiza una determinada distribución de potencia. El canal en su jugada, al ver la distribución de potencia del transmisor, para estropear la capacidad hará un reverse water-filling, es decir, dará más ganancia a los modos con menor potencia asignada. A continuación, jugará el diseñador del transmisor y hará water-filing directo sobre el canal. Ambos continuarán realizando sus respectivas jugadas alternándose pues directo y reverse water-filling hasta la situación de equilibrio. Es claro que la situación de equilibrio se alcanza cuando uno de los dos llega a la distribución uniforme. Esta es pues la solución para este caso, como suele ser habitual. En definitiva, cuando no se dispone de conocimiento del canal entonces la distribución óptima es la uniforme, denominada aquí como UPA.

Es importante destacar que existen soluciones intermedias entre el perfecto conocimiento del canal o la completa ausencia de este. Una de estas situaciones, caracterizada por la baja complejidad del feedback necesario del receptor al transmisor es aquella en la que el primero tan solo le indica cual es la mejor antena a utilizar. Es la técnica que se denomina selección de antena. Nótese que para una apertura en el transmisor de  $n_T$  antenas, tan solo se necesitan  $\log_2(n_T)$  bits en el canal de retorno con este tipo de CSI.

La determinación de la mejor antena es sencilla. Si se denomina como  $\underline{h}_1$  el canal de la antena transmisora con índice 1, entonces la contribución de esta antena a la capacidad será (3.31), donde  $E_T$  es la energía asignada a dicha antena:

$$C(1) = Ln \left[ 1 + \left( \underline{h}_1^H \cdot \underline{h}_1 \right) \frac{E_T}{N_0} \right] \quad (3.31)$$

El problema se complica cuando, siguiendo el procedimiento incremental se pretende pasar de la mejor a las dos mejores. La capacidad para el caso de dos antenas transmisoras, usando una matriz diagonal para la energía del transmisor sería (3.32) y la solución sería el uso de W-F sobre las normas de los canales vistos por cada antena transmisora, una vez elegidos los dos mejores según su norma.

$$C(2) = Ln \left[ 1 + \left( \underline{h}_1^H \cdot \underline{h}_1 \right) \frac{E_1}{N_0} \right] + Ln \left[ 1 + \left( \underline{h}_2^H \cdot \underline{h}_2 \right) \frac{E_2}{N_0} \right] \quad (3.32)$$

Más complejo resulta el diseño para el caso de que el transmisor usa la apertura completa y es el receptor el que desea usar selección de antena. En este caso, imaginemos que el receptor ha seleccionado  $m$  antenas y se plantea la selección o no de la antena  $m+1$ . Dado que se verifica (3.33) para cada vector visto por cada antena receptora de la apertura del transmisor:

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \left( \underline{\underline{H}}_m^H \cdot \underline{\underline{H}}_m + \underline{h}_{m+1} \cdot \underline{h}_{m+1}^H \right) = \underline{\underline{Q}} \cdot \left( \sum_{q=1}^m \underline{h}_q \cdot \underline{h}_q^H + \underline{h}_{m+1} \cdot \underline{h}_{m+1}^H \right) \quad (3.33)$$

Denominando:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{Q}} \cdot \sum_{q=1}^m \underline{h}_q \cdot \underline{h}_q^H \\ y \\ \underline{\underline{B}} &= \underline{\underline{Q}} \cdot \left( \underline{h}_{m+1} \cdot \underline{h}_{m+1}^H \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aplicando la regla del determinante,

$$\det \left[ \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \right] = \det \left[ \underline{\underline{A}} \right] \cdot \det \left[ \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} \right] \quad (3.35)$$

Se obtiene:

$$C(m+1) = C(m) + Ln \left[ 1 + \left( \underline{h}_{m+1} \cdot \left( \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{Q}} \cdot \sum_{q=1}^m \underline{h}_q \cdot \underline{h}_q^H \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{Q}} \underline{h}_{m+1}^H \right) \right] \quad (3.36)$$

Cambiando los papeles de las matrices anteriores, la definición de  $\underline{\underline{A}}$  y  $\underline{\underline{B}}$ , se llega a una expresión alternativa que es (3.37) en lo que se refiere a añadir una nueva antena en el receptor.

$$C(m+1) = Ln \left[ 1 + \underline{h}_{m+1} \cdot \underline{\underline{Q}} \underline{h}_{m+1}^H \right] + Ln \left( \det \left( \underline{\underline{I}}_{n_r} + \underline{\underline{Q}} \cdot \sum_{q=1}^m \underline{h}_q \cdot \underline{h}_q^H \right) \right) \quad (3.37)$$

donde

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \left( \underline{\underline{I}}_{n_r} - \frac{\underline{h}_{m+1} \cdot \underline{h}_{m+1}^H \cdot \underline{\underline{Q}}}{1 + \underline{h}_{m+1} \cdot \underline{\underline{Q}} \underline{h}_{m+1}^H} \right)$$

Esta expresión permite determinar la mejora por añadir una nueva antena en el receptor al igual que (3.36). No obstante, el método señalado no considera el posible rediseño de la matriz de covarianza del transmisor lo que aun hoy constituye un problema abierto.

Dentro de los problema abiertos cabe señalar el caso donde únicamente se dispone de CSI relativo al modulo de cada canal y no solo a su fase. Este problema es de gran interés ya que la estimación de fase es con mucho bastante mas inestable que la de modulo. Por esta razón es de interés el problema de maximización de capacidad cuando únicamente se considera fiable el modulo. Este problema parece tener una solución cerrada solo para el caso de canal MIMO 2x2. Es de destacar que si el lector recurre a las referencias podrá comprobar que la maximización de capacidad con solo modulo, al menos para el caso MIMO 2x2, en la mayor parte de las situaciones conduce de nuevo a UPA. La conclusión mas importante es que, junto con lo que se vera en el

próximo apartado, es que la distribución de potencia uniforme UPA es la que cubre la mayor parte de situaciones salvo la de conocimiento de canal instantáneo y perfecto, en cualquier desviación de esta situación, bastante difícil en el entorno radio, UPA es la solución mas adecuada.

### III.6. CAPACIDAD ERGODICA Y DE OUTAGE.

La capacidad utilizada hasta este momento se establece en base al canal disponible. Tomando un sistema de transmisión por tramas es claro que en cada una de estas tramas, con el canal correspondiente, se tendría una capacidad diferente. Parece lógico pues el plantearse como seria el promedio o, mas interesante cual es la probabilidad de que la capacidad caiga por debajo de un valor prefijado a lo largo de la transmisión.

El primer concepto liga con realizar una medida que establezca la capacidad promedio. Esta medida de la capacidad se denomina capacidad ergodica. La capacidad ergodica no es mas que el valor esperado de esta según el canal.

$$C_{Ergodica} = E_{\underline{H}} \left\{ \text{Ln} \left[ \det \left( \underline{I}_{n_r} + \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H \right) \right] \right\} \quad (3.38)$$

La maximización de la capacidad ergodica sobre canal MIMO gaussiano (Rayleigh) o cualquier otra distribución isotropita o invariante a una rotación es de nuevo la uniforme o UPA.

$$C_{ERG}(UPA) \geq C_{ERG}(\underline{Q}) \quad (3.39)$$

Obviamente la existencia de LOS entre transmisor y receptor invalida la conclusión anterior y la solución tendería a realizar water-filling sobre los eigenmodes del canal LOS.

Mas interesante que la anterior es el uso de la denominada capacidad de outage. Esta capacidad que con una determinada probabilidad alcanza el canal.

$$C_{outage} = \{ \text{Capacidad que se alcanza con } \text{Pr} = 1 - \epsilon \} \quad (3.40)$$

La maximización de la capacidad de outage es complicada ya que el problema no es convexo. Una manera de convertir el problema en un problema convexo es manejar la probabilidad de outage de manera discreta. Si denominamos  $C_{objetivo}$  la capacidad deseada y  $t_i$  se define según (3.41),

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{outage con } \underline{H}_i \\ 0 & \text{no outage con } \underline{H}_i \end{cases} \quad (3.41)$$

entonces la siguiente formulación convierte el problema en convexo:

$$\begin{aligned}
t_i &= \in_{discreto} (0,1) \\
\text{Traza}(\underline{\underline{Q}}) &\leq E_T \\
\mathbf{r}_i &= \log \left[ \det \left( \underline{\underline{I}}_{n_R} + \underline{\underline{H}}_i \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{H}}_i^H \right) \right] \geq C_{objetivo} \cdot (1 - t_i) \\
\min_{\underline{\underline{Q}}, t_i} & \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot t_i
\end{aligned} \tag{3.42}$$

No existe una solución cerrada al problema anterior aunque su formulación garantiza la existencia de una solución única que puede encontrarse vía optimización convexa.

### III.7 CONCLUSIONES

En el presente capítulo se ha expuesto la expresión de la capacidad para el caso de distribución gaussiana tanto de señal transmitida como recibida. Después de una presentación sobre valores asintóticos de la capacidad se ha pasado a revisar el método de diseño para el caso en que se disponga de CSI perfecto.

La solución encontrada para el caso de conocer perfectamente el canal en el transmisor es el denominado water-filling. Un procedimiento que establece que para obtener capacidad es necesario distribuir la potencia de modo que la suma de esta por la inversa de la ganancia del canal sea constante. Es de destacar que la solución, denominada water-filling (WF), es la totalmente opuesta a un criterio de igualdad o fairness pues asigna más potencia al canal mejor.

Se ha de destacar el papel predominante que toma, siempre que el CSI sea nulo, la distribución uniforme o UPA. Incluso, es mucho más interesante que, aun cuando UPA no es la solución óptima, la diferencia entre métodos complejos como W-F y UPA es insignificante, máxime si se tiene en cuenta la diferencia de complejidad entre UPA o cualquier otra alternativa.

Posteriormente se ha pasado a describir procedimientos de CSI parcial. Básicamente se ha descrito el más popular que es el método de selección de antena o, siendo más precisos, la aceptación de incremento progresivo en el número de antenas en el transmisor y/o el receptor. Con todo, no existen métodos de diseño del transmisor para selección de antenas y todos los procedimientos asumen UPA en el transmisor para implementar el procedimiento de aceptación o rechazo de una nueva antena.

Finalmente se ha introducido brevemente los conceptos de capacidad ergódica y capacidad de outage. Esta última muy interesante en el ámbito práctico pero difícil de maximizar. En cualquier caso, la valoración de nuevos procedimientos en términos de la capacidad de outage es la manera más interesante de valorar contribuciones en este campo.

### III.8 REFERENCIAS.

[3.1] aaaa