

# FILTRADO MSE (Wiener)

Procesado de Señal  
Miguel A. Lagunas

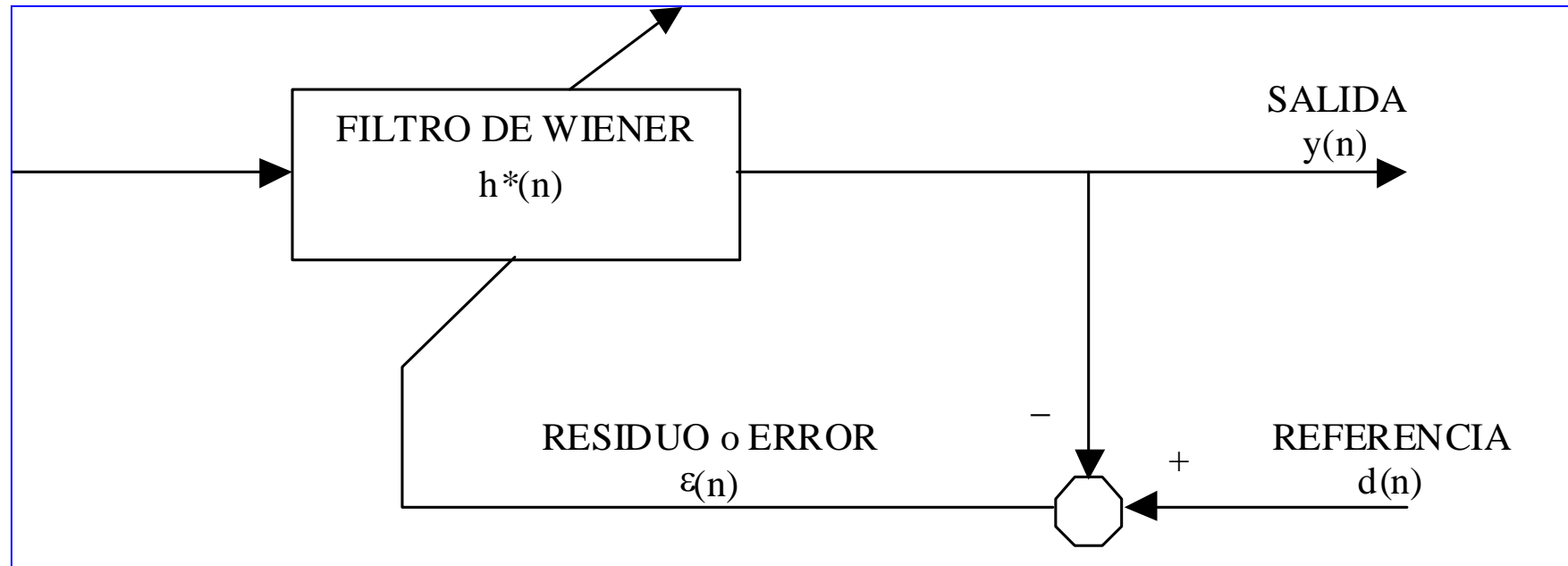
# Filtrado MSE

Tradicionalmente la noción de filtrar se ha llevado a cabo en el dominio de la frecuencia (paso bajo, paso banda, paso alto, supresor de banda etc. Motivado por tecnología RLC las alternativas de diseño en otro dominio, así como versiones con el objetivo de extraer una señal determinada fueron prácticamente inexistentes.

El diseño de un sistema capaz de extraer una señal determinada desde su entrada puede abordarse en tecnología digital. De hecho, el diseño es lineal cuando la estructura es un FIR.

El criterio de calidad en la extracción de una señal dada, denominada REFERENCIA, a partir de la señal de entrada, denominada DATOS, será el error cuadrático medio MSE entre la SALIDA y la referencia.

DATOS	$x(n)$	$n=0, \dots, N-1$	vector $\underline{X}_n$
FILTRO	$h^*(q)$	$q=0, \dots, Q-1$	vector $\underline{h}$
SALIDA	$y(n)$	$n=0, \dots, N+Q-1$	
REFERENCIA	$d(n)$	$n=0, \dots, N-1$	



Criterio de Diseño:

$$\xi = E \left\{ \varepsilon(n)^2 \right\} = E \left\{ d(n) - y(n) \right\}^2$$

$$y(n) = \underline{h}^H \underline{X}_n$$

La salida del filtro a diseñar. Una combinación lineal de los datos.

$$\xi = P_d + \underline{h}^H \underline{R} \underline{h} - \underline{h}^H \underline{P} - \underline{P}^H \underline{h}$$

El MSE contiene los cuatro términos de la izquierda.

$P_d$  es la potencia de la referencia  $P_d = E\{|d(n)|^2\}$ ;

$$\underline{R} = E\left\{\underline{X}_n \underline{X}_n^H\right\}$$

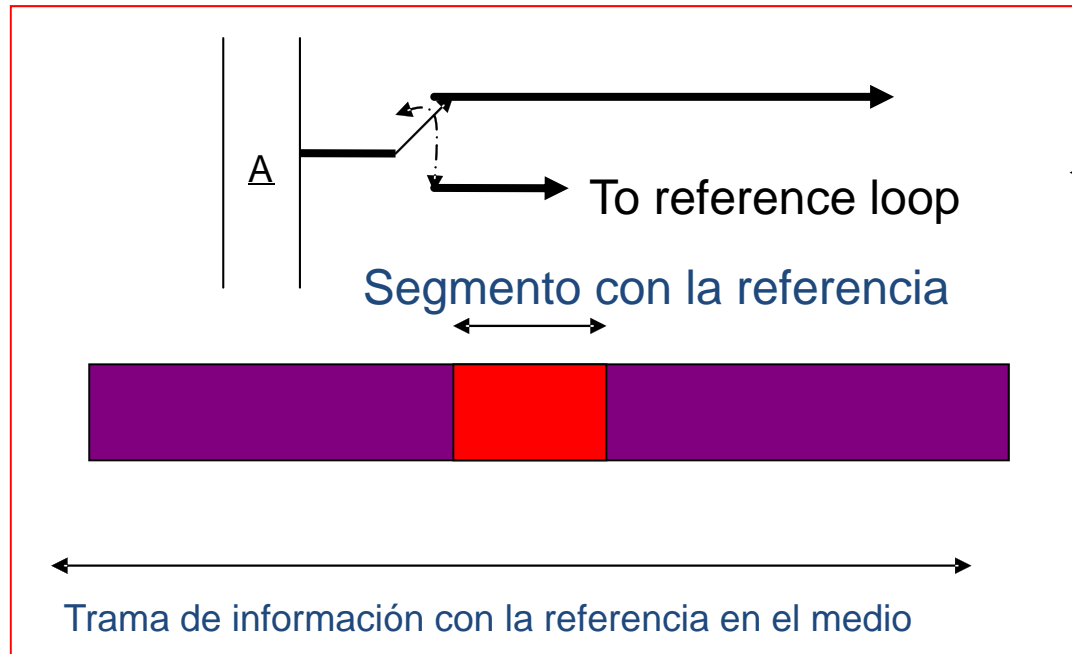
Es la matriz de autocorrelación de los datos o de la señal de entrada.

$$\underline{P} = E\left\{\underline{X}_n d^*(n)\right\}$$

Es la correlación cruzada entre los datos o la referencia, también denominado P-vector

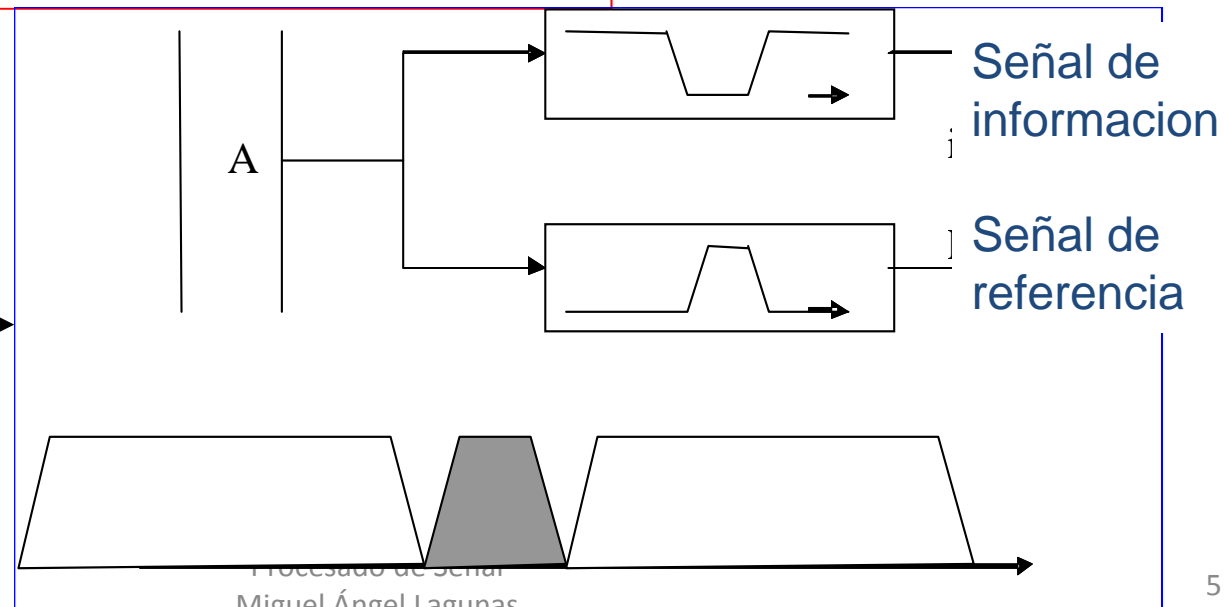
Nótese que la matriz R es para el diseño una observación de cómo esta la entrada o escenario sobre el que el filtro ha de actuar. Por otro lado, el vector P denota cuanto de la referencia que ha de extraer esta presente en el escenario.

# Entramado de la Referencia

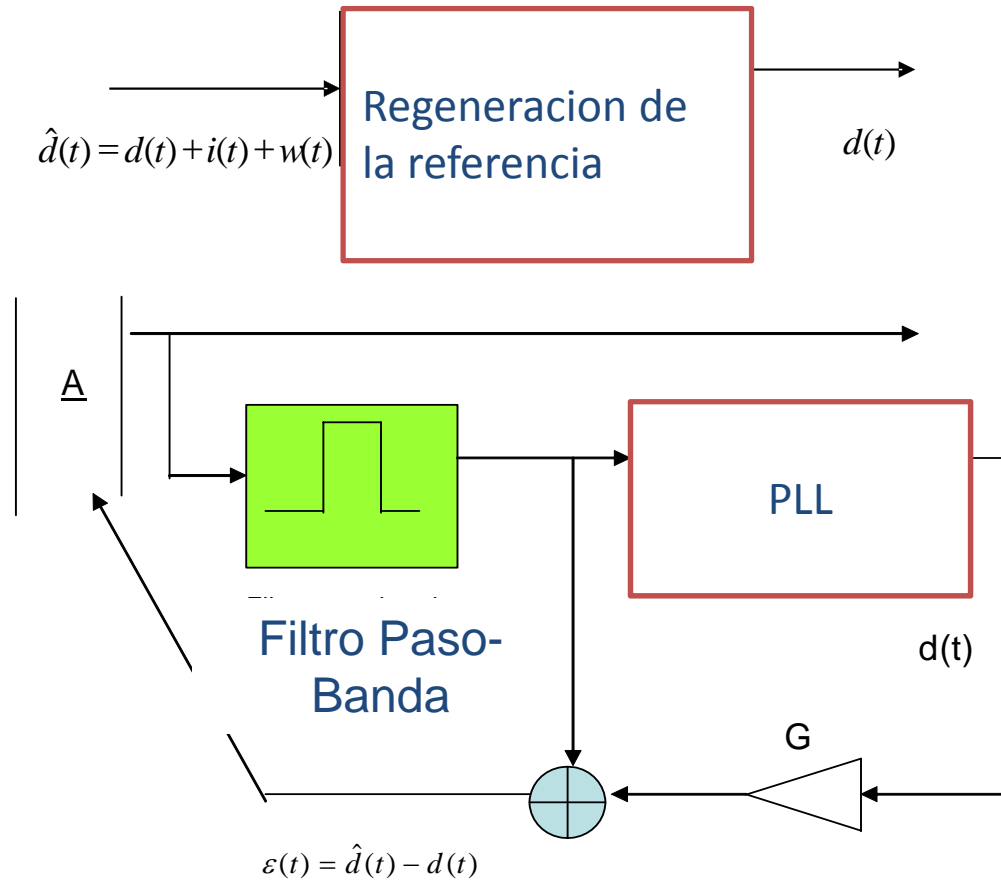


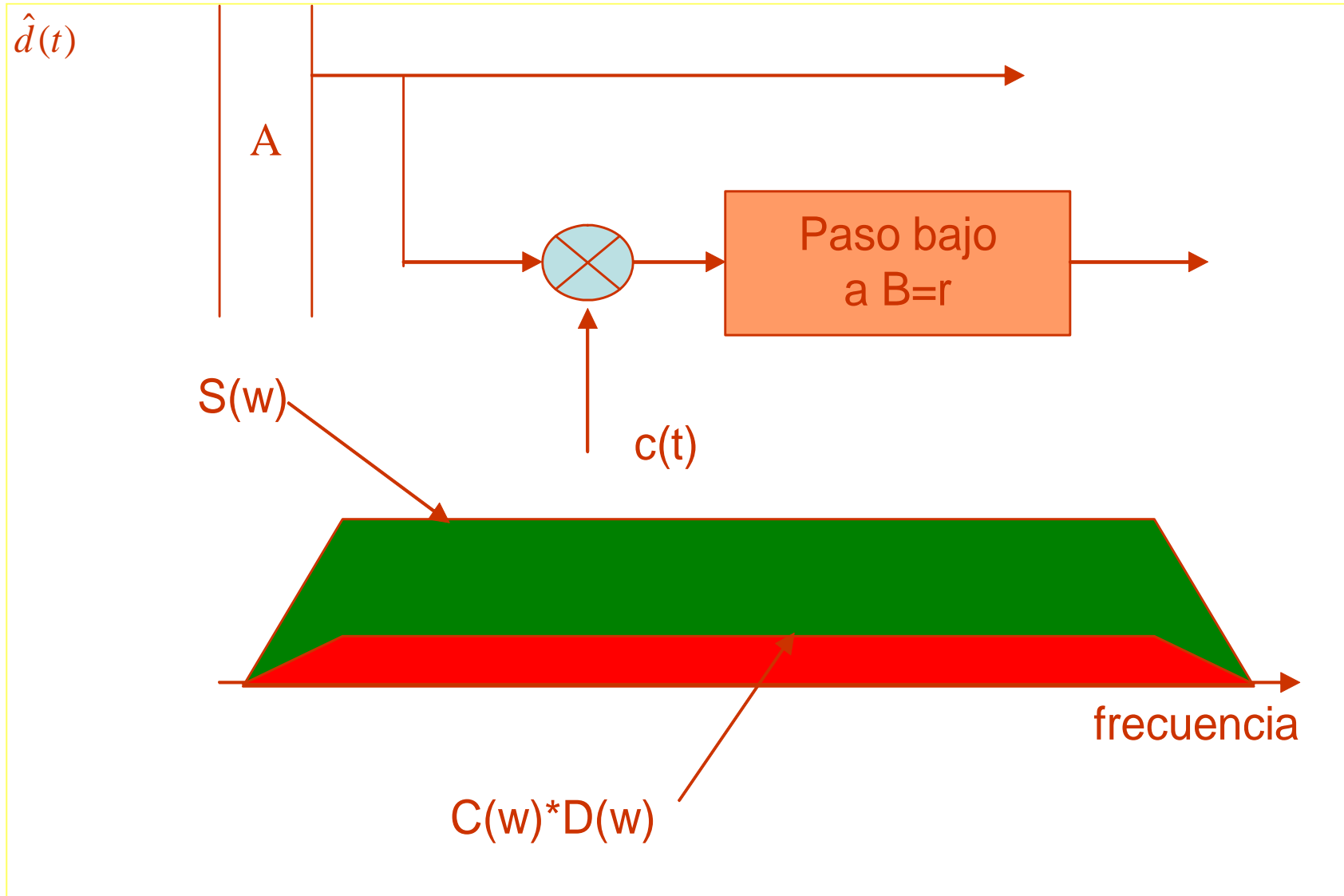
TRB- TDD

TRB-FDD



# Pure tone reference loop





Los sistemas presentados de entramado de la referencia son los mas, digamos tradicionales en comunicaciones. No son todos pues existen para otros sistemas de transporte así como en todas las tecnologías de acceso múltiple. Tampoco son, como se vera a lo largo del capitulo, todos los que se emplean en acústica u otras aplicaciones especificas de procesado de señal que no son sistemas de comunicaciones



# El filtro optimo MSE

$$\xi = P_d + \underline{h}^H \underline{\underline{R}} \underline{h} - \underline{h}^H \underline{P} - \underline{P}^H \underline{h}$$

El MSE es una forma cuadrática por lo que tiene un solo mínimo

El mínimo se obtiene anulando el gradiente con respecto al vector filtro hermitico.

$$\nabla_{\underline{h}^H} \xi = \underline{\underline{R}} \underline{h} - \underline{P} = \underline{0}$$

De donde puede obtenerse el filtro optimo

$$\underline{h}_{opt} = \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{P}$$

La salida del filtro optimo será:

$$y(n) = \underline{h}_{opt}^H \underline{X}_n = \underline{P}^H \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{X}_n$$

# El error mínimo y la superficie de error

El error mínimo es:

$$\xi_{min} = P_d - \underline{P}^H \underline{R}^{-1} \underline{P} = P_d - \underline{P}^H \underline{h}_{opt} = P_d - \underline{h}_{opt}^H \underline{R} \underline{h}_{opt}$$

Cuando la referencia es una portadora

$$\underline{P} = P_d \underline{S}$$

$$\begin{aligned} \xi_{min} &= P_d - \underline{P}^H \underline{R}^{-1} \underline{P} = \\ &= P_d (1 - P_d (\underline{S}^H \underline{R}^{-1} \underline{S})) = \\ &= P_d \left(1 - \frac{P_d}{P_d + N_{0b}}\right) \end{aligned}$$

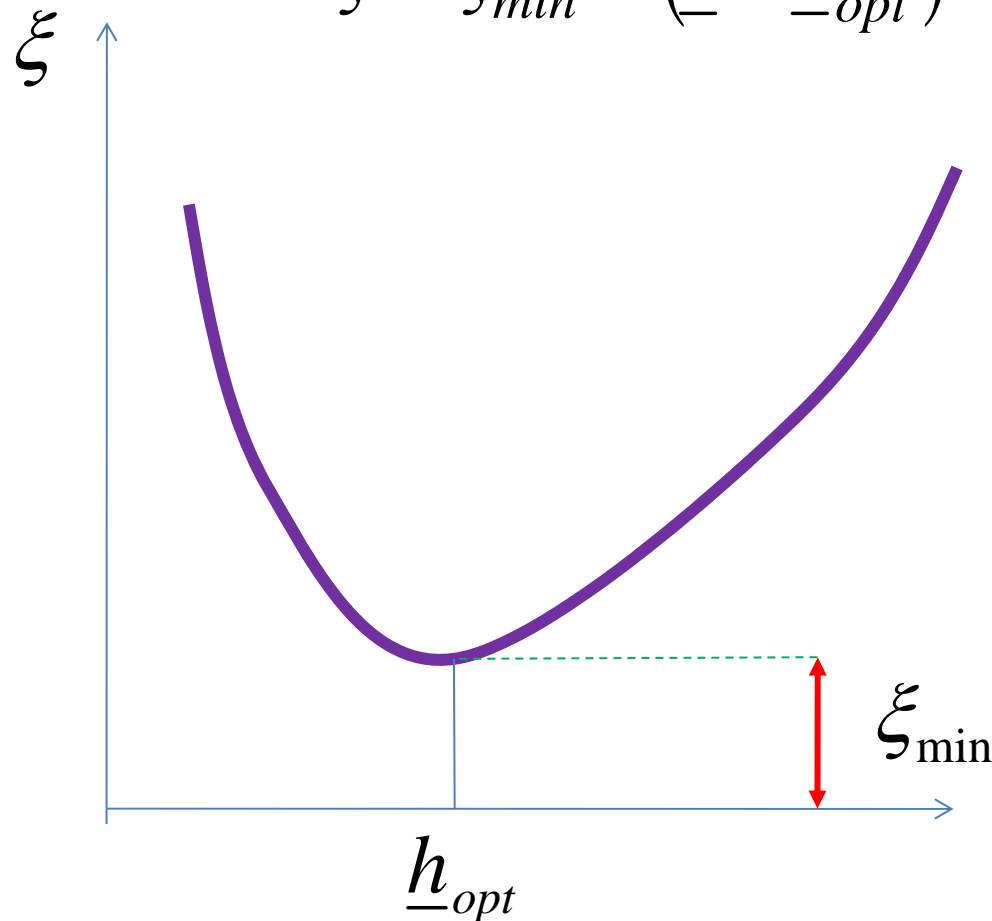
Inversa de la Potencia del Proceso a la entrada del filtro en la frecuencia de la portadora (igual a la potencia de la referencia mas el ruido que entra)

De este modo la SNR a la salida del filtro optimo MSE seria:

$$SNR = \frac{P_d}{N_{0b}} = \frac{P_d}{\xi_{min}} - 1$$

El error, en general y para un filtro cualquiera  $h$ , puede escribirse de la manera siguiente, que evidencia la existencia de un solo mínimo:

$$\xi = \xi_{min} + (\underline{h} - \underline{h}_{opt})^H \underline{\underline{R}} (\underline{h} - \underline{h}_{opt})$$



Note que el error de coeficientes no se repercute directamente sobre el MSE sino que lo hace a través de la matriz de autocorrelacion de los datos

$$\xi = \xi_{min} + (\underline{h} - \underline{h}_{opt})^H \underline{\underline{R}} (\underline{h} - \underline{h}_{opt})$$

La expresión del MSE también se puede escribir como:

$$\xi = \xi_{min} + \underline{\underline{R}} (\underline{h} - \underline{h}_{opt}) (\underline{h} - \underline{h}_{opt})^H = \xi_{min} + tr \left( \underline{\underline{R}} \tilde{\underline{h}} \tilde{\underline{h}}^H \right)$$

Cuando el error de coeficientes se convierte en una variable aleatoria, el exceso de error también lo es y su valor esperado se puede escribir como sigue:

$$E(\xi - \xi_{min}) = tr \left( \underline{\underline{R}} E \left( \tilde{\underline{h}} \tilde{\underline{h}}^H \right) \right) = tr \left( \underline{\underline{R}} E \right)$$

Un caso de interés es cuando los coeficientes se emplean en registro finito de b bits.

Asumiendo el error de cuantificación inversamente proporcional al número de bits b, el exceso de error

$$\underline{\underline{E}} = l_{max} 2^{-2b} \underline{\underline{I}}$$

$$Exceso = l_{max} 2^{-2b} tr(\underline{\underline{R}}) = QPl_{x_{max}} 2^{-2b}$$

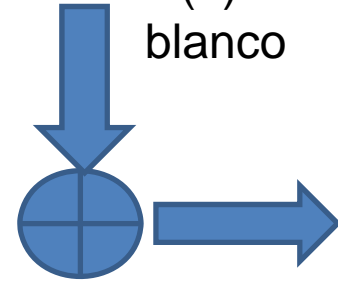
# Ejemplo practico

$d(n)$

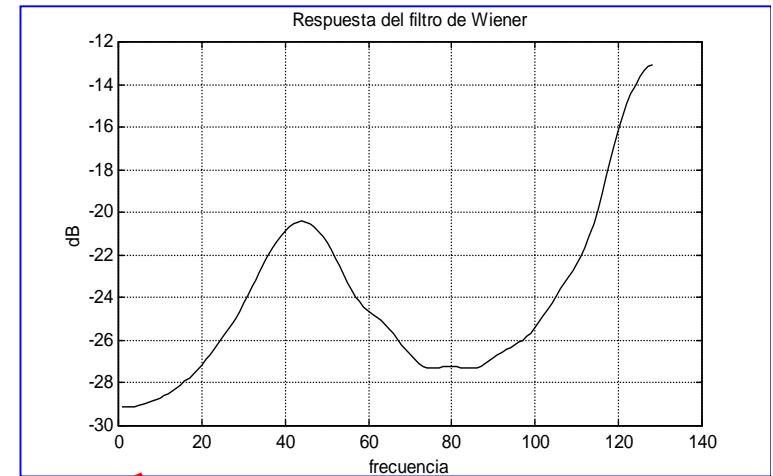
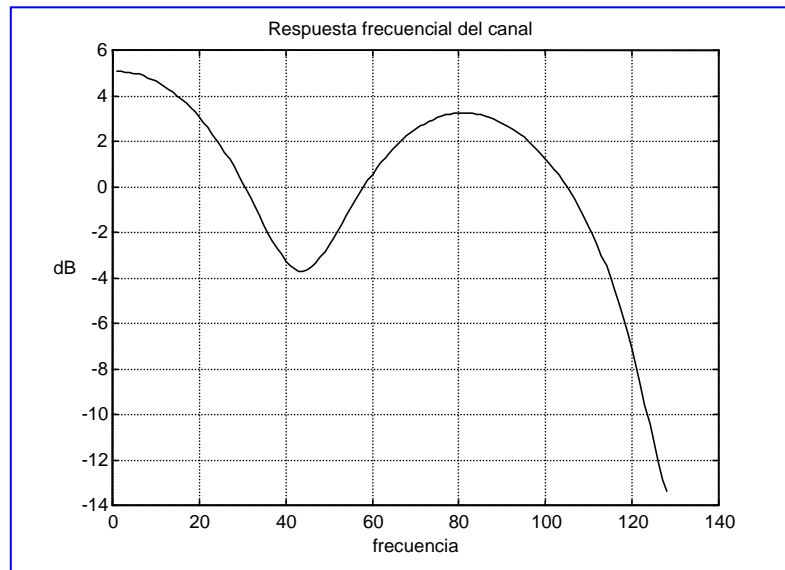


$$G(z) = 1 - 0,3 z^{-1} - 0,1 z^{-2} + 0,5 z^{-3} + 0,1 z^{-4} - 0,01 z^{-5}$$

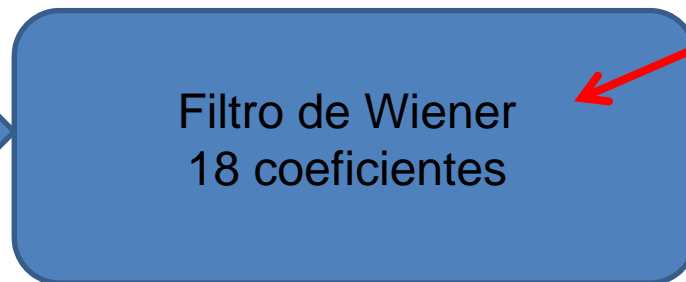
$w(n)$   
blanco



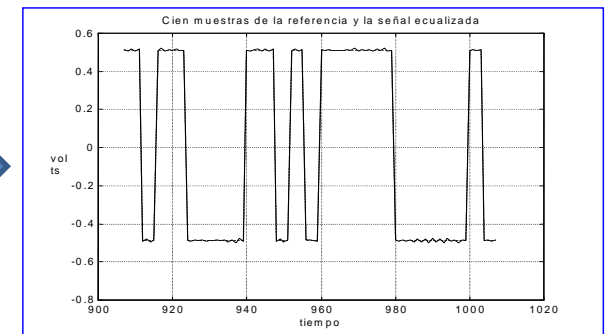
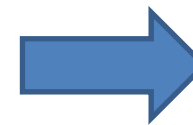
$x(n)$



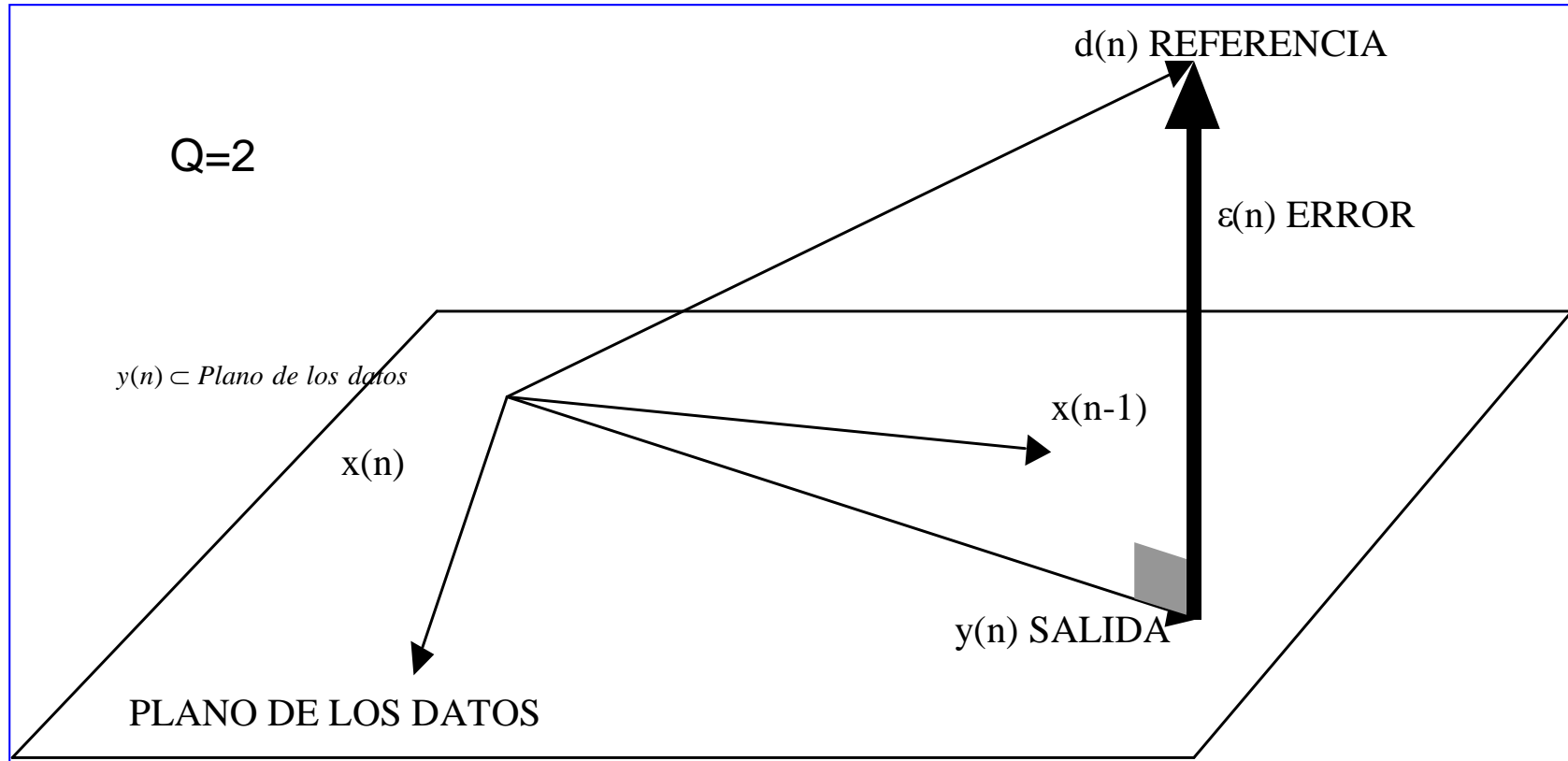
$x(n)$



Filtro de Wiener  
18 coeficientes



# Interpretación Geométrica



PRINCIPIO DE ORTOGONALIDAD: El error ha de ser ortogonal (Independiente) a los datos  $x(n)$ .

$$\underline{\varepsilon} \perp DATOS \Rightarrow E\{\varepsilon^*(n)x(n-q)\} = 0 \quad q = 0, \dots, Q-1$$

Además, con esta condición, el error mínimo puede obtenerse como la correlación cruzada del error y la referencia::

$$\xi_{min} = E\{\varepsilon(n)d^*(n)\}$$

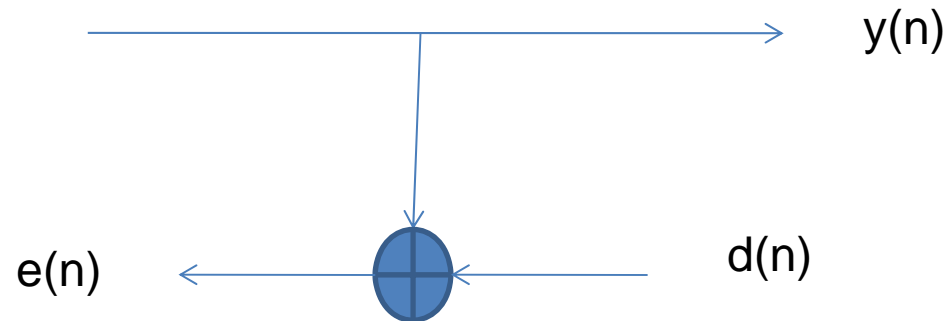
Las ecuaciones de diseño al igual que el error mínimo coinciden, como no podía ser de otro modo, con las ya expuestas.

# Filtrado MSE y Máxima SNR

A la salida del filtro:

$$\varepsilon(n) = d(n) - y(n)$$

$$d(n) = \varepsilon(n) + y(n)$$



Como la salida es una combinación lineal de los datos y error es ortogonal a los datos, la potencia de la suma es la suma de las potencias.

$$P_d = \xi_{\min} + P_y$$

Así pues, la SNR resulta ser:

$$SNR = \frac{P_y}{\xi_{\min}} = \frac{P_d}{\xi_{\min}} - 1$$

Es decir, fijada la potencia de la referencia, maximizar la SNR es completamente equivalente a minimizar el MSE



# El filtrado MSE en frecuencia

Las ecuaciones de diseño pueden expresarse en forma no matricial como:

$$\sum_{q=0}^{Q-1} h^*(q)r_{xx}(l-q) = r_{dx}(l) \quad l = 0, \dots, Q-1$$

Asumiendo que el Q es grande (TODOS LOS RESULTADOS QUE SIGUEN SON MAS CORRECTOS CUANTO MAS LARGO ES EL FILTRO) Se puede tomar transformada de Fourier y ver a que equivale el diseño en frecuencia.

$$H(\omega)S_x(-\omega) = S_{dx}(-\omega) \Leftrightarrow H^*(-\omega)S_x(\omega) = S_{xd}(\omega)$$

Nótese que tanto la densidad espectral de  $x(n)$  como la cruzada pueden estimarse de los datos y la referencia vía WOSA o MV

Así pues, el filtro óptimo en frecuencia es:

$$H(\omega) = \frac{S_{xd}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

(Nótese que estrictamente, este filtro nunca es realizable).

Del mismo modo, el error mínimo  
puedes expresarse (Parseval)  
como:

$$\begin{aligned}\xi_{min} &= P_d - \underline{h}_{opt}^H \underline{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_d(\omega) - S_{dx}(\omega)H^*(-\omega)] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ S_d(\omega) - \frac{S_{dx}(\omega)S_{xd}(\omega)}{S_x(\omega)} \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_d(\omega) \left[ 1 - \frac{S_{dx}(\omega)S_{xd}(\omega)}{S_x(\omega)S_d(\omega)} \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_d(\omega) [1 - |\gamma(\omega)|^2] d\omega\end{aligned}$$

Donde

$$|\gamma(\omega)|^2 = \frac{S_{dx} S_{xd}}{S_{xx} S_{dd}}$$

Se le denomina la Coherencia Espectral entre las dos señales  $x(n)$  y  $d(n)$ .

Se le denomina coherencia espectral porque si una de las señales es una versión filtrada (lineal) de la otra, entonces las rayas espectrales de ambas son coherentes y es fácil de probar que la coherencia espectral es la unidad. Cuando las dos señales o procesos son independientes la coherencia es cero

$$\text{si } x(n) = d(n) * g(n) \Leftrightarrow X(\omega) = D(\omega)G(-\omega)$$

$$\text{entonces } S_{xd}(\omega) = G^*(\omega)S_{dd}(\omega)$$

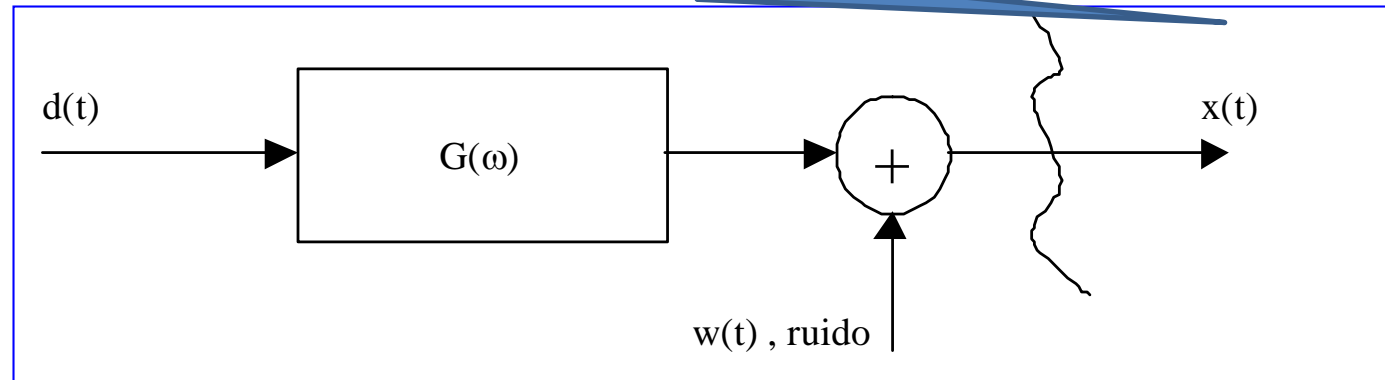
$$S_{dx}(\omega) = G(\omega)S_{dd}(\omega)$$

$$S_{xx}(\omega) = |G(\omega)|^2 S_{dd}(\omega)$$

$$\text{y en consecuencia } |\gamma|^2 = 1; \forall \omega$$

Claramente cuando la referencia esta en el plano de los datos, el error MSE es cero pues de los datos se puede obtener la referencia sin ningún error. A las frecuencia donde la coherencia es alta el error baja de forma acorde.

# Ejemplo: Ecuación



$$S_{xd}(\omega) = G^*(\omega)S_{dd}(\omega) \quad S_{xx}(\omega) = |G(\omega)|^2 S_{dd}(\omega) + S_{nn}(\omega)$$
$$H(\omega) = \frac{S_{xd}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{G^*(\omega)}{|G(\omega)|^2 + \left(\frac{S_{nn}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}\right)} = \frac{1}{G(\omega)} \frac{1}{1 + \frac{1}{SNR(\omega)}}$$

Para SNR altas el MSE es un ZF que invierte perfectamente el canal.

Como, además la coherencia espectral sube con la SNR a cada frecuencia.

$$|\gamma(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{S_w(\omega)}{|G(\omega)|^2 S_d(\omega)}} = \frac{SNR(\omega)}{1 + SNR(\omega)}$$

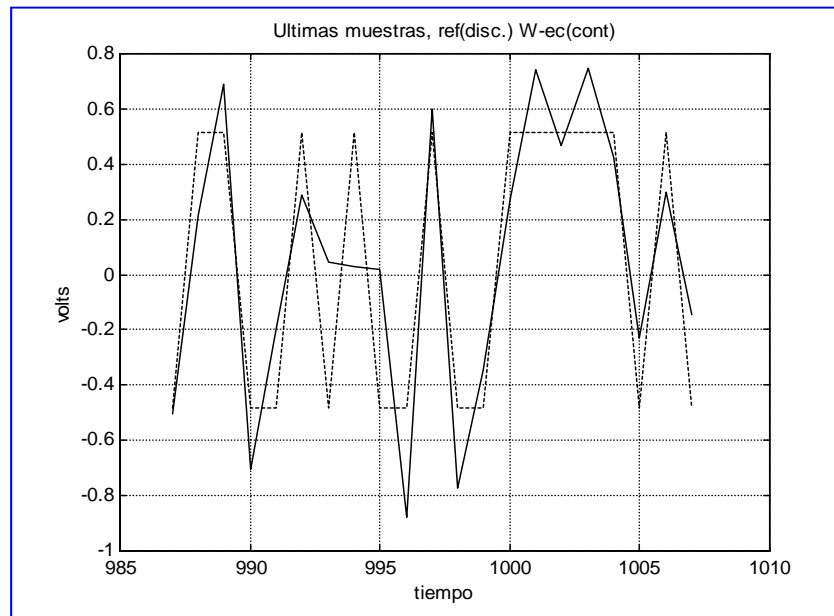
$$H(w) = \frac{1}{G(w)} |\gamma(w)|^2$$

Expresión que revela en este caso, y en general, la estrecha relación que existe entre la forma de hacer su trabajo el MSE y la coherencia espectral entre datos y referencia

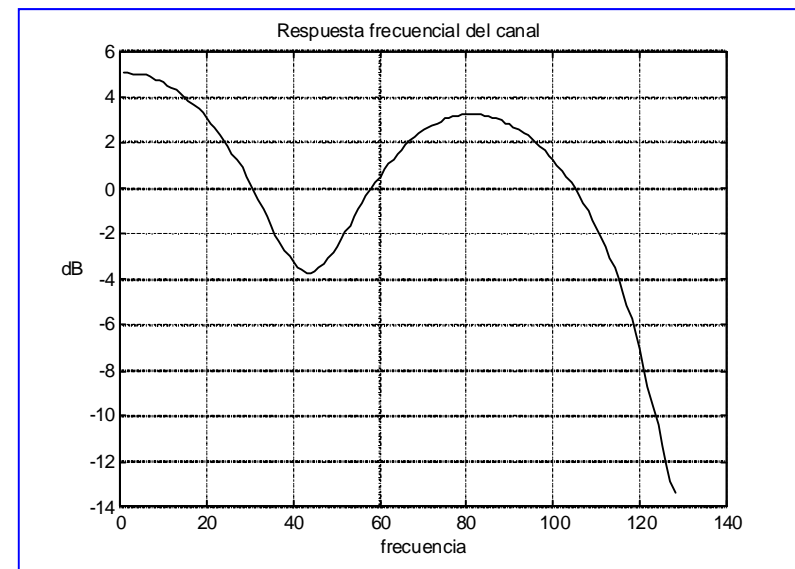
- Cuando la coherencia es baja (cero) No hace nada pues el ruido o la interferencia predominan.
- Cuando la coherencia es alta (uno) invierte el canal de comunicaciones

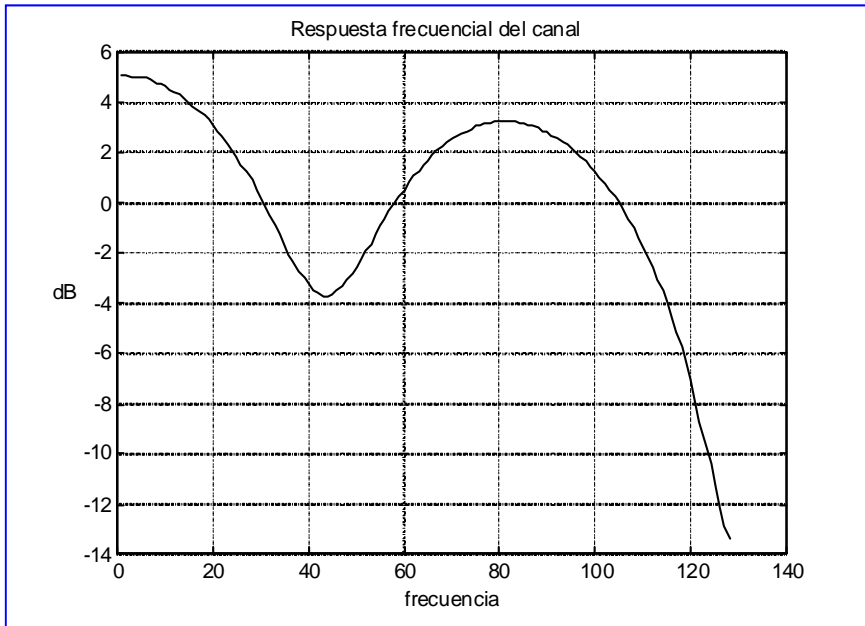
# Ejemplo practico

Señal de comunicaciones con una  $E_b/N_0$  de 11 dB.

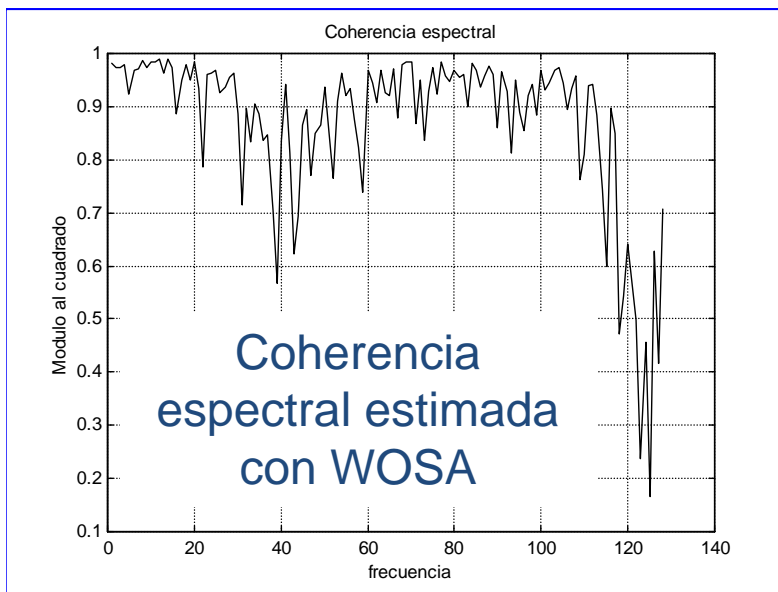
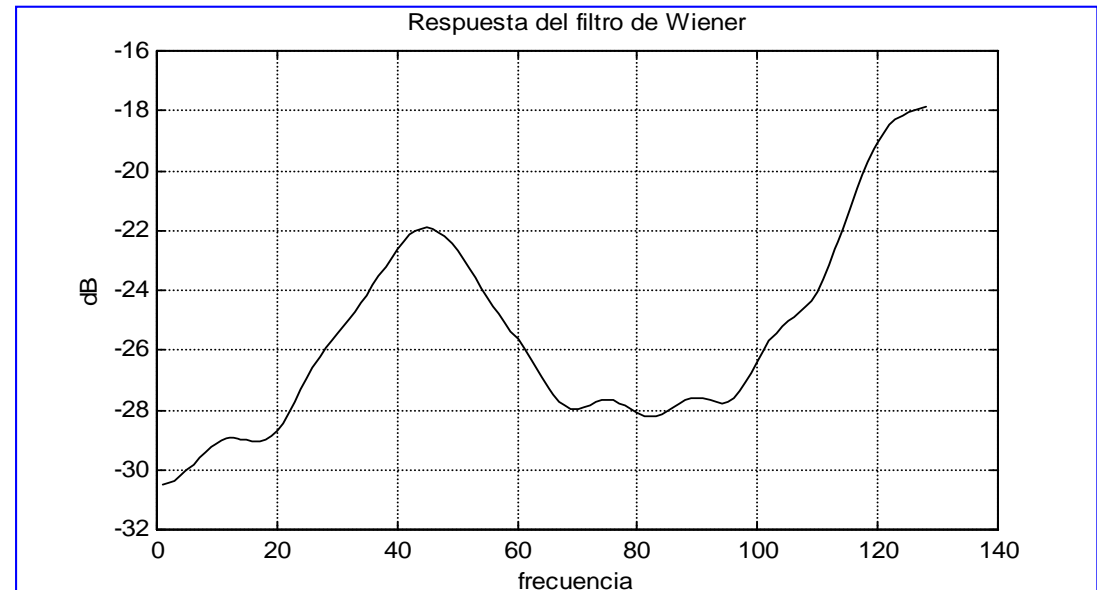


Respuesta frecuencial del canal



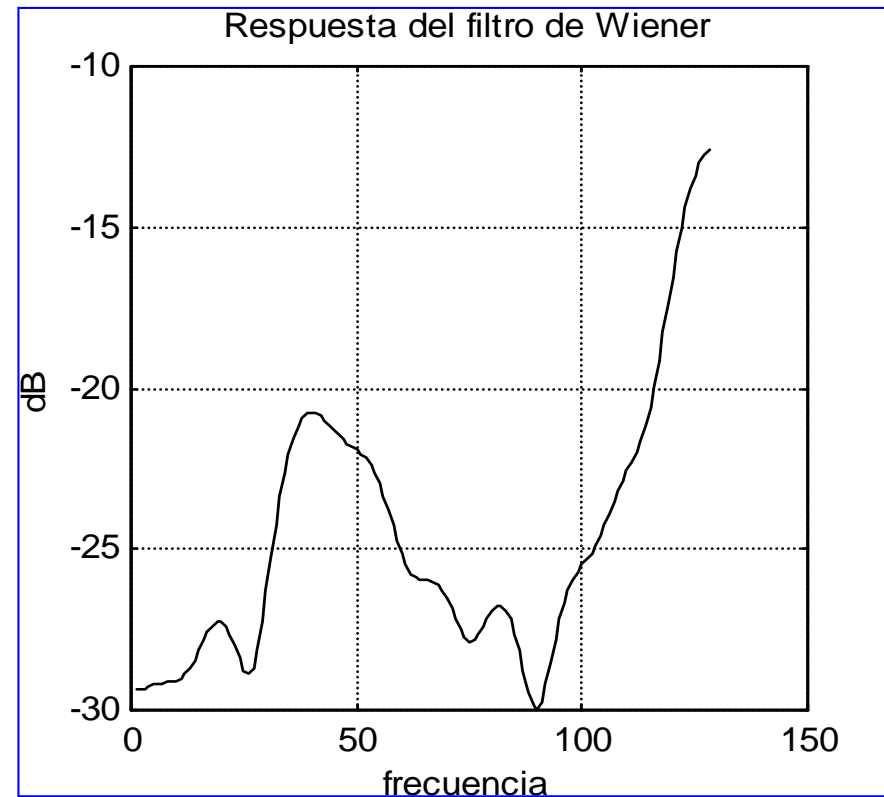
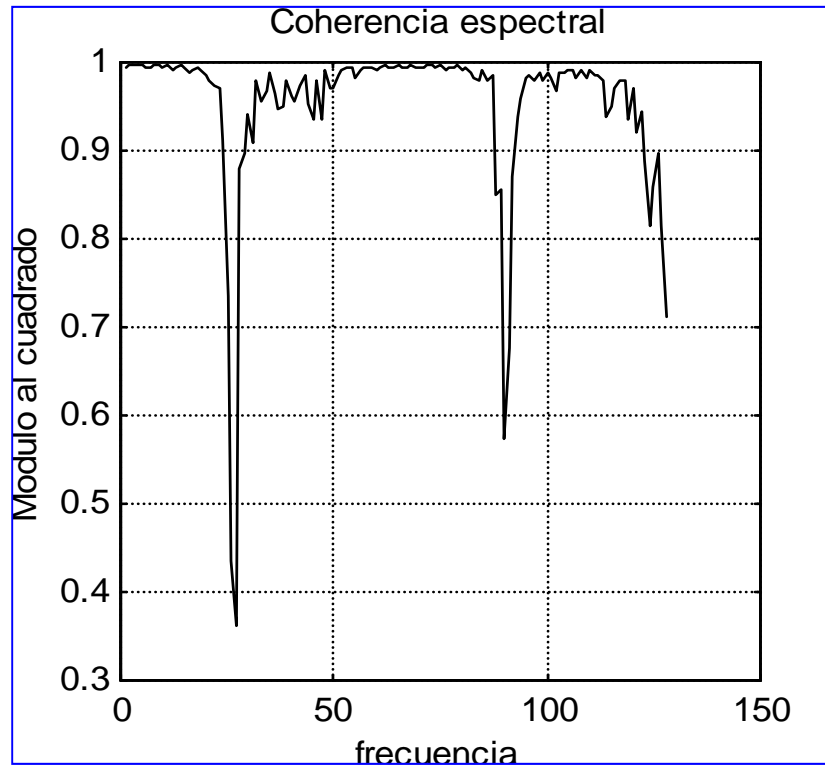


Resposta frecuencial filtro de Wiener de 18 coeficientes



9/13/2013

Igual que el caso anterior pero con la presencia de dos interferencias de banda estrecha en 25 y 90 MHz.





# El filtrado de Wiener directamente desde los datos

Se pretende diseñar el filtro MSE minimizando el error cuadrático medio no estadístico. Como podrá verse este planteamiento práctico se reduce al teórico donde la matriz de autocorrelación de los datos y el vector P pasar a ser sus estimadores naturales

Asumiendo N el número de muestras disponibles de los datos y un filtro a diseñar de Q coeficientes, la salida  $y(n)$  durará  $N+Q-1$  muestras y contendrá un pre y un post transitorio de  $2Q-2$  muestras cada uno.

$$\underline{y}^T = [y(0), \dots, y(Q-2), y(Q-1), \dots, y(N-1), y(N), \dots, y(N+Q-1)]$$



PRE-Transitorio



POST-Transitorio

$$\underline{y}^T = \underline{h}^H \underline{X} \quad \text{donde}$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(Q-2) & x(Q-1) & \cdots & x(N-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x(0) & \cdots & x(Q-3) & x(Q-2) & \cdots & x(N-2) & x(N-1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x(0) & x(1) & \cdots & x(N-Q+1) & x(N-Q+2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x(0) & \cdots & x(N-Q) & x(N-Q+1) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix}$$

El gradiente y el correspondiente filtro son:

$$\underline{X} \left( \underline{d}^* - \underline{X}^H \underline{h} \right) = \underline{0}$$

$$\underline{h} = \left[ \underline{X} \underline{X}^H \right]^{-1} \underline{X} \underline{d}^*$$

El MSE será:

$$MSE \equiv \left| \underline{d}^T - \underline{y}^T \right|^2 = \left| \underline{d}^T - \underline{h}^H \underline{X} \right|^2$$

Siendo:

$$\hat{\underline{R}} = \underline{X} \underline{X}^H \quad \hat{\underline{P}} = \underline{X} \underline{d}^*$$

El problema: De la salida hay  $N+Q-1$  muestras y de la referencia solamente  $N$ .  
¿Qué hacer?

Existen las siguientes alternativas

- 1.- Poner  $Q-1$  ceros y a continuación las  $N$  muestras disponibles de  $d(n)$ : usar  $n=0, \dots, N+Q-1$ .
- 2.- Poner  $Q-1$  ceros al final de  $d(n)$ : usar  $n=0, \dots, N+Q-1$ .
- 3.- Tomar de la salida tan solo las  $N-Q+1$  muestras del permanente: usar  $n=Q-1, \dots, N-1$ .
- 4.- Poner  $Q-1$  ceros, a continuación, poner  $N-Q+1$  muestras de  $d(n)$  (comenzando por  $d(0)$ ) y añadir  $Q-1$  ceros: usar  $n=0, \dots, N+Q-1$ .

Opción 3 .- Es la mejor pues evita los transitorios. La matriz a invertir es hermitica pero no Toeplitz (Complejidad). Se le denomina **Método de COVARIANZA**

Opción 4.- Es la mas artificial pero la matriz es ermitica y Toeplitz así que es la de complejidad menor. Se le denomina **Método de CORRELACION**

# Predicción Lineal

Predictor lineal es básicamente predecir  $x(n)$  con una combinación lineal de las muestras anteriores (Predicción hacia adelante o “Forward”, hacia atrás o “Backward” e Interpolación)

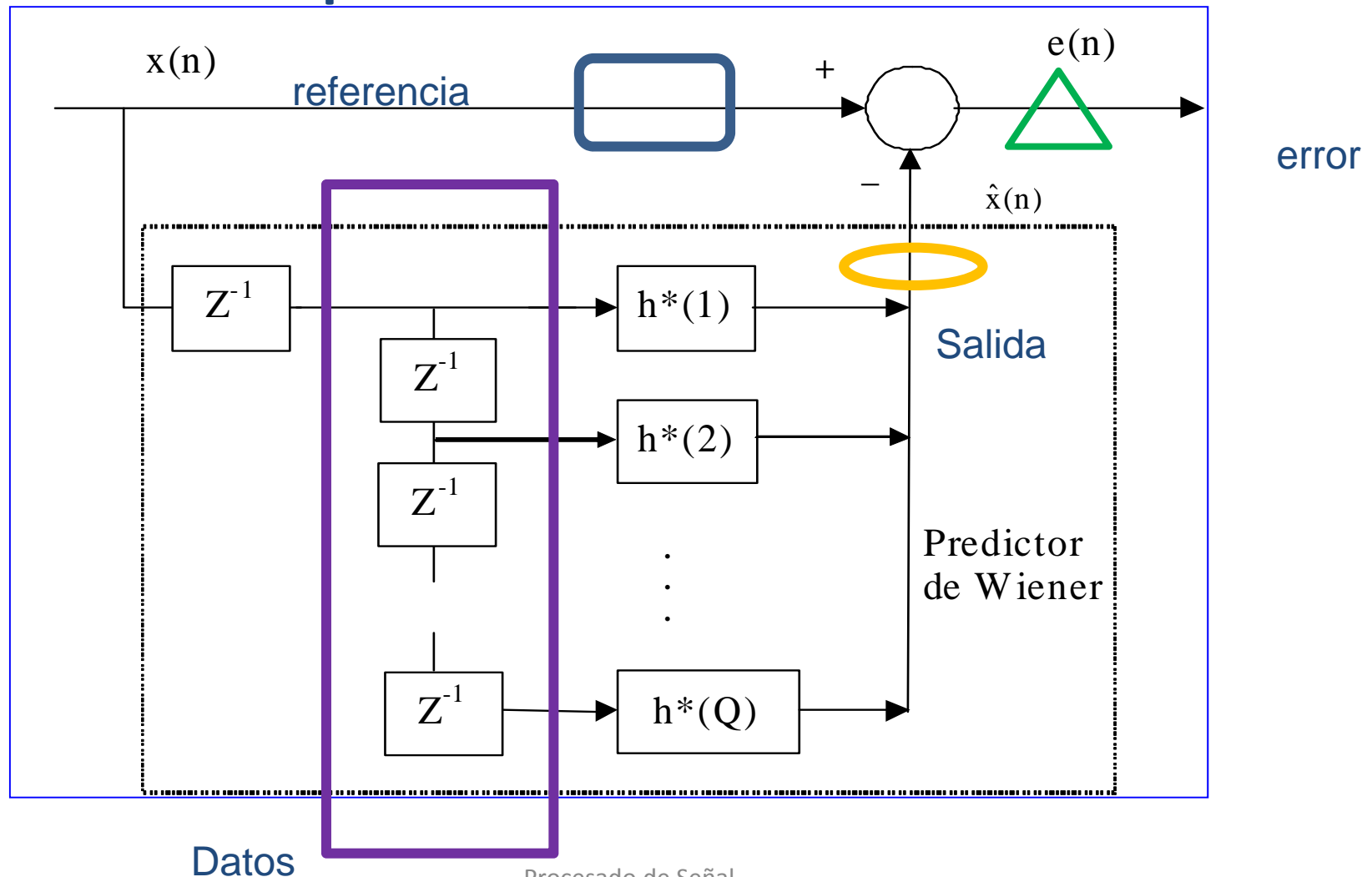
$$\hat{x}(n) = [h(1), \dots, h(Q)]^* \underline{X}_{n-1} = \sum_{q=1}^Q h^*(q) x(n-q)$$

El error de predicción sería:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = [1, -h(1), -h(2), \dots, -h(Q)]^* \underline{X}_n = x(n) - \underline{h}^H \underline{X}_{n-1}$$

La arquitectura de este filtro digital FIR revela que se trata de un filtro de Wiener o MSE

# Arquitectura (“Tap-Delay”) de un predictor Lineal



Las ecuaciones de diseño así como la de la potencia del error de predicción mínimo se resuelven como si se tratase de un filtro de Wiener, y resultan ser:

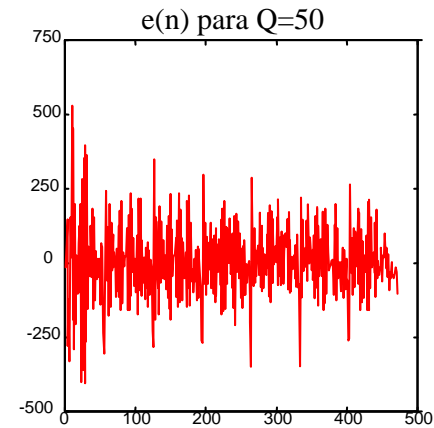
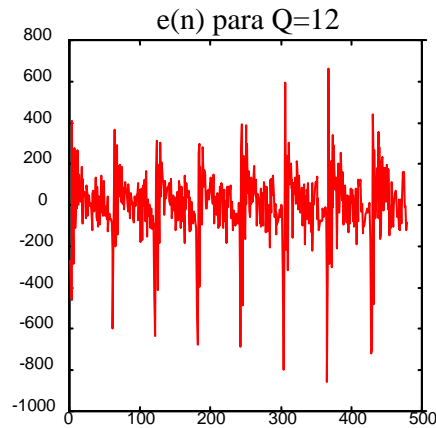
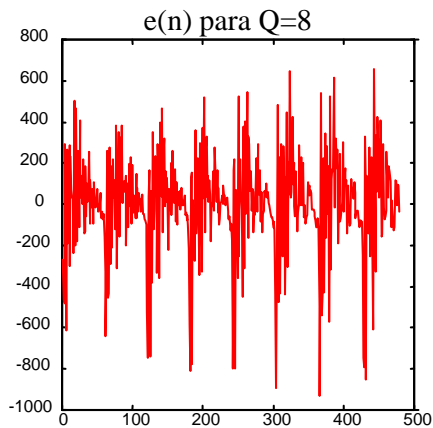
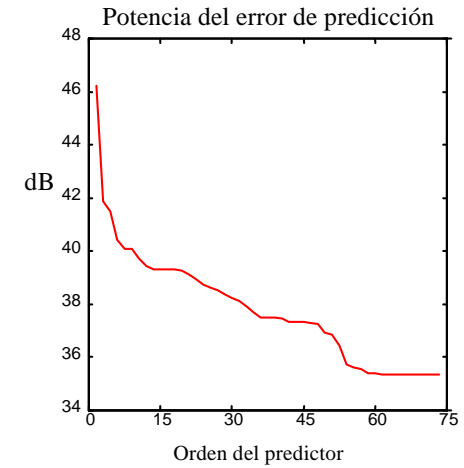
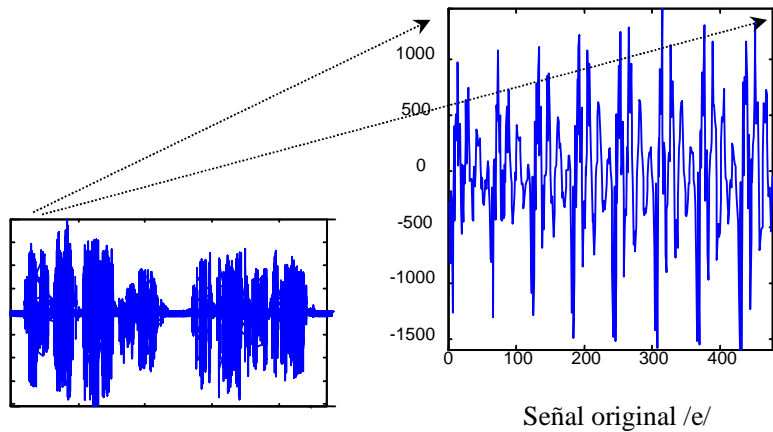
$$r_x(l) = \sum_{q=1}^Q h^*(q)r_x(l-q) \quad l = 1, \dots, Q$$

$$\xi_{min} = r_x(0) - \sum_{q=1}^Q h^*(q)r_x(-q) = r_x(0) - \sum_{q=1}^Q h(q)r_x(q)$$

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(Q) \\ r_x(-1) & r_x(0) & \cdots & r_x(Q-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(-Q) & r_x(-Q+1) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -h(1) \\ \vdots \\ -h(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{min} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, diseñar un predictor lineal de orden Q es equivalente a adaptar un modelo AR(Q) a los datos. Las ecuaciones de diseño son las denominadas ecuaciones Y-W.

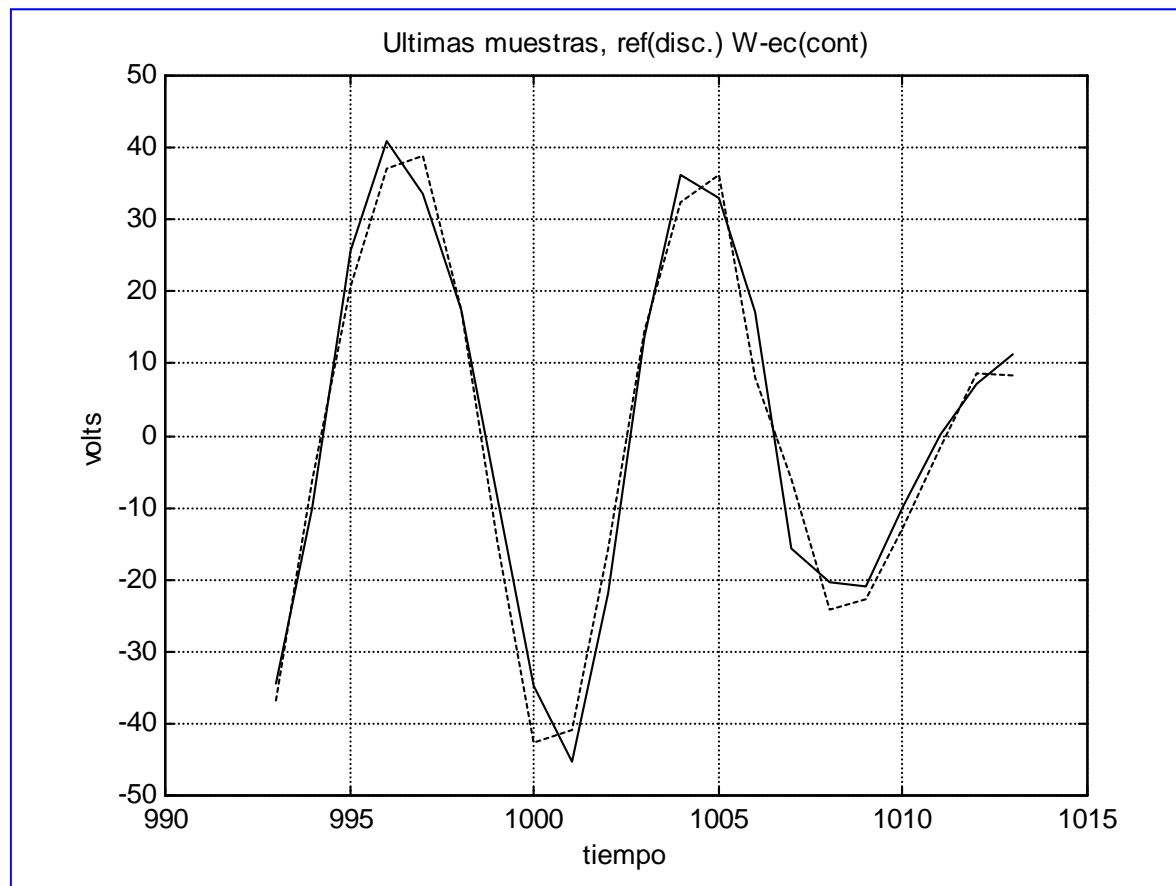
# LP en procesamiento de voz (J.Vidal)



# Señal original AR(5)

## Predictor orden 12

### Señal/Señal prevista





# El Algoritmo de Levinson

Las ecuaciones de YW junto con la DFT es los dos métodos mas implementados sobre aplicaciones de procesamiento de señal. La necesidad de un algoritmo eficiente para YW, al igual que la FFT para la DFT es importante.

La ineficiencia de resolver directamente las ecuaciones queda evidenciada por el hecho de que al incrementar en uno el orden, tan solo un nuevo valor de correlación entra pero nos obliga a recalcular los nuevos  $q+1$  coeficientes.

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(Q) \\ r(-1) & r(0) & \cdots & r(Q-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-Q) & r(-Q+1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -h^Q(1) \\ \vdots \\ -h^Q(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_Q^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La ineficiencia mencionada se observa mejor en la próxima transparencia.

$$\begin{bmatrix}
 r(0) & r(1) & \dots & r(Q) & r(Q+1) \\
 r(-1) & r(0) & \dots & r(Q-1) & r(Q) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 r(-Q) & r(-Q+1) & \dots & r(0) & r(1) \\
 r(-Q-1) & r(-Q) & \dots & r(-1) & r(0)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 -h^{Q+1}(1) \\
 \vdots \\
 -h^{Q+1}(Q) \\
 -h^{Q+1}(Q+1)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \sigma_{Q+1}^2 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Todas estas ecuaciones se resolvieron al resolver el problema para Q coeficientes

Solo un nuevo valor

El error forward y el backward, su potencia, son idénticas para un proceso estacionario. Esta es una noción intuitiva de entender y medir la estacionaridad de un proceso.

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(Q) & r(Q+1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(Q-1) & r(Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r(-Q) & r(-Q+1) & \cdots & r(0) & r(1) \\ r(-Q-1) & r(-Q) & \cdots & r(-1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h^{Q+1}(Q+1)^* \\ -h^{Q+1}(Q)^* \\ \vdots \\ -h^{Q+1}(1)^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{Q+1}^2 \end{bmatrix}$$

Otra forma, idéntica a la anterior, de escribir las ecuaciones de un predictor backward o hacia atrás.

En base a los comentarios anteriores, la propuesta es escribir los coeficientes nuevos como una combinación de los coeficientes del predictor anterior o de orden Q.

$$\underline{a}_f^{Q+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -h^{Q+1}(1) \\ \vdots \\ -h^{Q+1}(Q) \\ -h^{Q+1}(Q+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -h^Q(1) \\ \vdots \\ -h^Q(Q) \\ 0 \end{bmatrix} + K_{Q+1} \begin{bmatrix} 0 \\ -h^Q(Q)^* \\ \vdots \\ -h^Q(1)^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_f^Q \\ 0 \end{bmatrix} + K_{Q+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_b^Q \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_b^{Q+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{a}_b^Q \end{bmatrix} + K_{Q+1}^* \begin{bmatrix} \underline{a}_f^Q \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al sustituir esta propuesta en las ecuaciones de diseño, se obtiene:

$$\underline{R}_{Q+1} \underline{a}_f^{Q+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{Q+1}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_Q^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_Q \end{bmatrix} + K_{Q+1} \begin{bmatrix} \Delta_Q^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_Q^2 \end{bmatrix}$$

siendo

$$\Delta_Q = r(-Q-1) - \sum_{q=1}^Q h^Q(q) r(-Q-1+q) = \begin{bmatrix} r(-Q-1) & r(-Q) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_f^Q \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al identificar

$$K_{Q+1} = -\frac{\Delta_Q}{\sigma_Q^2}$$

$$\sigma_{Q+1}^2 = \left(1 - |K_{Q+1}|^2\right) \sigma_Q^2$$

Finalmente, se obtienen los nuevos coeficientes

$$h^{Q+1}(q) = h^Q(q) - K_{Q+1} h^Q(Q-q+1)^*$$

$$h^{Q+1}(Q-q+1) = h^Q(Q-q+1) - K_{Q+1} h^Q(q)^*$$

$$h^{Q+1}(Q+1) = -K_{Q+1}$$

# Resumen Algoritmo de Levinson

$$h^1(1) = \frac{r(-1)}{r(0)} \quad \sigma_1^2 = r(0) - \frac{|r(1)|^2}{r(0)}$$

Inicialización

$$\Delta_Q = r(-Q-1) - \sum_{q=1}^Q h^Q(q)r(-Q-1+q) = [r(-Q-1) \quad r(-Q) \quad \dots \quad r(0)] \begin{bmatrix} a_f^Q \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{Q+1} = -\frac{\Delta_Q}{\sigma_Q^2}$$

Calcular Coeficiente de Reflexión y nuevo error de predicción

$$\sigma_{Q+1}^2 = \left(1 - |K_{Q+1}|^2\right) \sigma_Q^2$$

$$h^{Q+1}(q) = h^Q(q) - K_{Q+1}h^Q(Q-q+1)^*$$

$$h^{Q+1}(Q-q+1) = h^Q(Q-q+1) - K_{Q+1}h^Q(q)^*$$

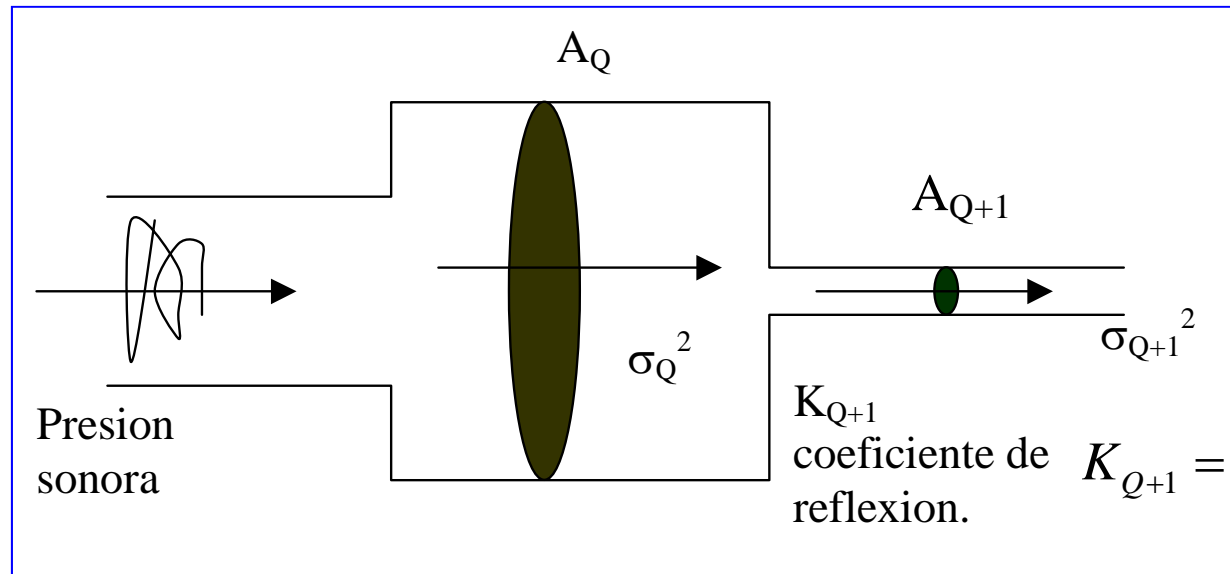
Calcular “in place” los nuevos coeficientes

$$h^{Q+1}(Q+1) = -K_{Q+1}$$

$$Q \Rightarrow Q+1$$

Continuar hasta llegar al orden deseado

# Interpretación de las ecuaciones



$$K_{Q+1} = -\frac{\Delta_Q}{\sigma_Q^2}$$

$$\sigma_{Q+1}^2 = \left(1 - |K_{Q+1}|^2\right) \sigma_Q^2$$

$$K_{Q+1} = \frac{A_{Q+1} - A_Q}{A_{Q+1} + A_Q}$$

La ecuación que calcula el nuevo error a partir del anterior es idéntica a la que regula la potencia refractada versus la incidente en propagación de ondas de presión en un recinto cerrado y adiabático. Por esta razón se le denomina coeficiente de reflexión. Revela también cual es la relación de áreas entre las dos secciones.

Nótese que los coeficientes de reflexión son siempre, en modulo, inferiores a la unidad.

Por su dinámica limitada son mas convenientes y preferidos en la implementación hardware que los coeficientes de la estructura tap-delay o clásica.

La potencia del error se va calculando paso a paso. El, orden correcto en la practica se determina cuando la reducción en el error no compensa la complejidad ni mejora perceptivamente o directamente la calidad.

El numero de coeficientes determina el numero de secciones que aproximan correctamente el sistema real. Todo se determina midiendo presión o velocidad a la salida del tubo sin entrar en su interior.

Al llegar a la salida al espacio abierto del tubo acústico el coeficiente de reflexión baja a cero o valores muy pequeños, revelando que se ha llegado al final.

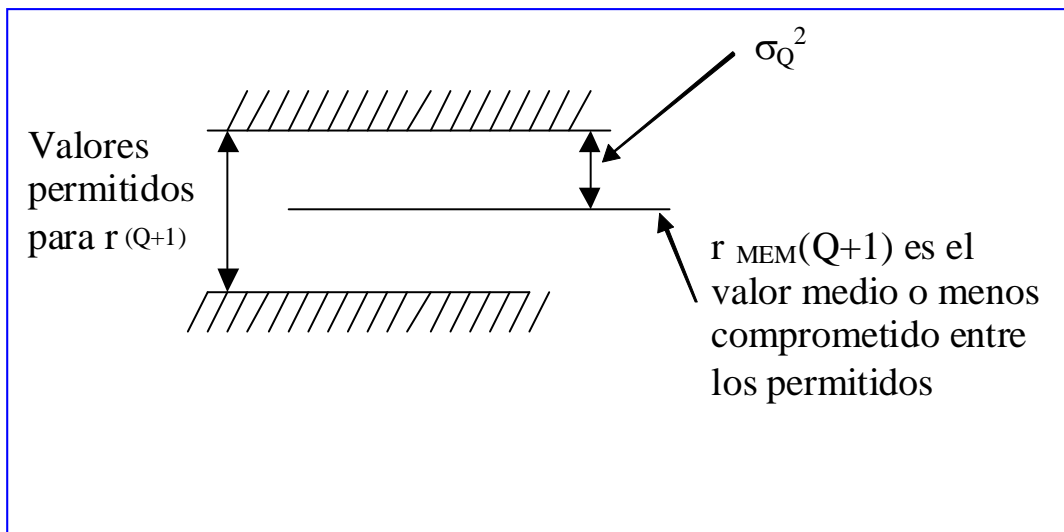
$$\Delta_Q = r(-Q-1) - \sum_{q=1}^Q h^Q(q) r(-Q-1+q) = \begin{bmatrix} r(-Q-1) & r(-Q) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a^Q}{f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

También se puede escribir como:

$$r(Q+1) = -K_{Q+1}^* \sigma_Q^2 + \sum_{q=1}^Q h^Q(q)^* r(Q+1-q) = K_{Q+1}^* \sigma_Q^2 + r_{MEM}(Q+1)$$

Comprendido entre +/-1

Extrapolación de Máxima Entropía de la correlación a partir de los valores anteriores.





# Arquitectura en Celosía (“Lattice”)

La idea es realizar una estructura que solo emplee los coeficientes de reflexión, su valor menor que uno facilita su implementación y garantiza que el sistema es invertible (la estructura es valida con una variación menor tanto para análisis (Conocer las secciones del tubo) como para síntesis (Replicar el tubo))

La estructura resultante muestra que cualquier FIR puede implementarse en celosía en lugar de tap-delay de manera mucho mas eficiente practica y monitorizable tanto a nivel físico como de forma integral.

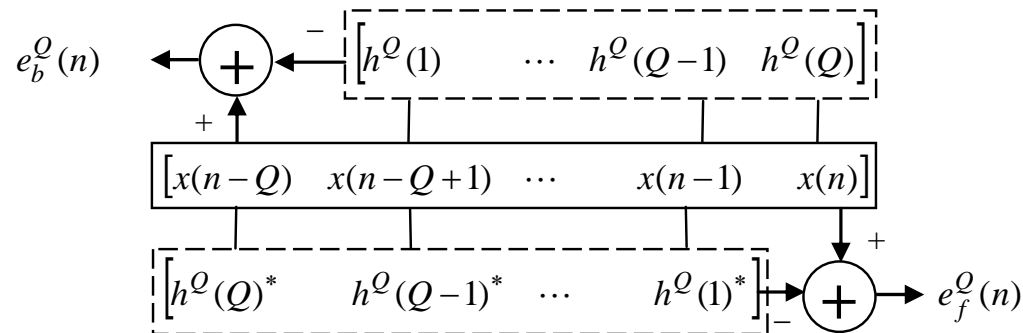
La estructura en celosía compara con la tap-delay del mismo modo que los sistemas o formas canónica tipo Foster o Cauer lo hace en la realización y síntesis de filtros analógicos.

La estructura esta basada en un uso inteligente de los errores forward y backward de predicción.

Los errores forward y backward son:

$$e_f^Q(n) = \underline{a}_f^{QH} \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-Q) \end{bmatrix} \quad e_b^Q(n) = \underline{a}_b^{QH} \begin{bmatrix} x(n-Q) \\ x(n-Q+1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix}$$

Como puede verse en este esquema



Al expresar el siguiente error forward se obtiene

$$e_f^{Q+1}(n) = \underline{a}_f^{Q+1H} \begin{bmatrix} x(n) \\ \vdots \\ x(n-Q) \\ x(n-Q-1) \end{bmatrix}$$

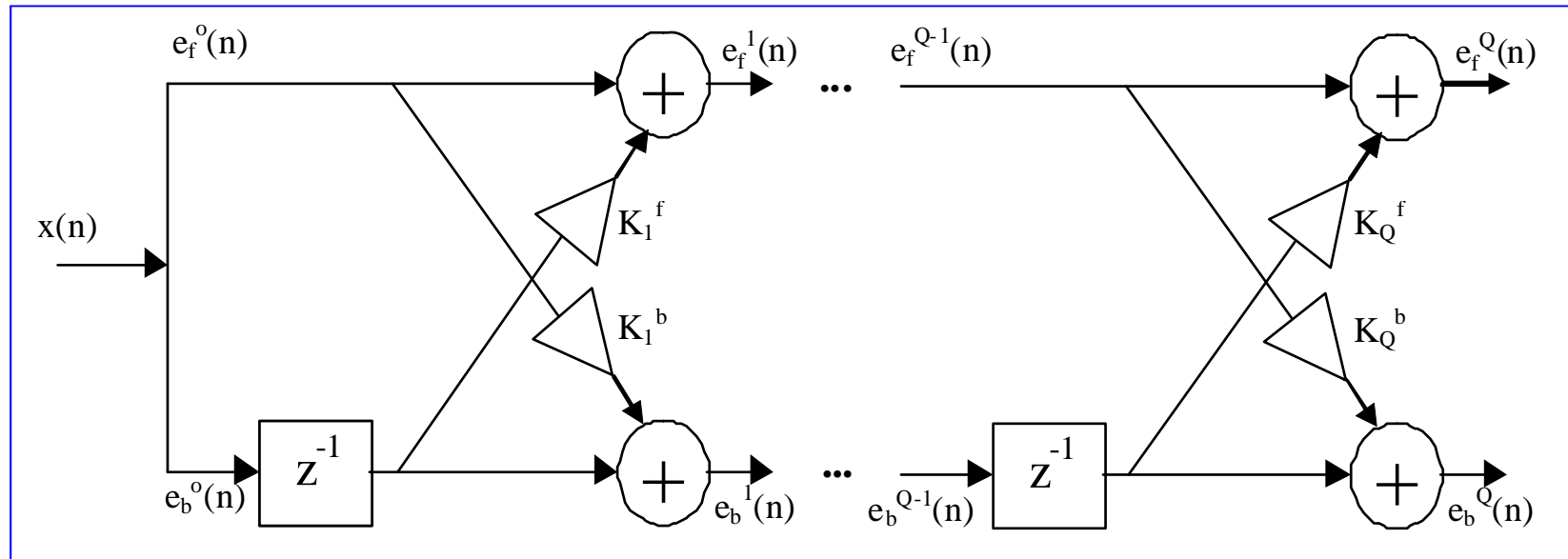
En definitiva,

$$e_f^{Q+1}(n) = e_f^Q(n) + K_{Q+1}^* e_b^Q(n-1) = e_f^Q(n) + K_{Q+1}^f e_b^Q(n-1)$$

Procediendo, del mismo modo con el error backward se obtiene:

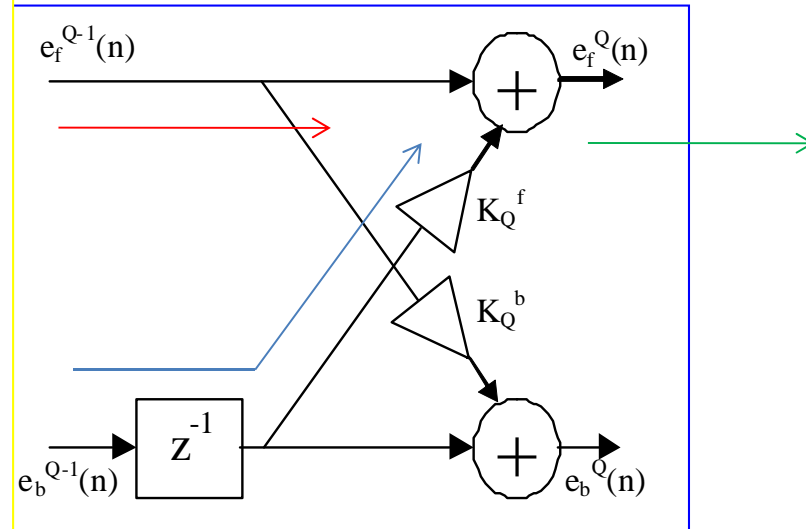
$$e_b^{Q+1}(n) = e_b^Q(n-1) + K_{Q+1}^b e_f^Q(n)$$

Lo que permite dibujar la arquitectura de la nueva forma canónica de implementar cualquier filtro FIR



Nótese que aunque de forma general, se ha supuesto que los coeficientes forward y backward son diferentes ha de recordarse que en un proceso estacionario ambos predictores son iguales y por tanto sus coeficientes de reflexión también lo son.

Cada salida del error nuevo, por ejemplo, el forward en  $Q+1$ , es un error, cuya potencia, ha de minimizar un filtro de un coeficiente, el de reflexión  $K_{q+1}$  con el dato que es el error forward de la etapa anterior y retrasado un instante. La referencia es el error forward de la etapa anterior. Del mismo modo se puede interpretar como un filtro MSE de un coeficiente la forma en que se minimiza para el backward.



$$K_{Q+1}^f = -\frac{E\{e_f^Q(n)e_b^Q(n-1)^*\}}{E\{|e_b^Q(n-1)|^2\}} = -\frac{FB}{B}$$

$$K_{Q+1}^b = -\frac{E\{e_f^Q(n)e_b^Q(n-1)^*\}}{E\{|e_f^Q(n)|^2\}} = -\frac{FB}{F}$$

La solución es:

Los dos coeficientes de reflexión anteriores son el que minimiza el error forward y el que minimiza el backward y, claro esta no garantiza que los dos sean menores que la unidad. De hecho se puede probar que es uno es menor el otro es mayor que la unidad. Un diseño mejor seria minimizar una combinación convexa de ambos, es decir, minimizar el siguiente objetivo:

$$\Psi = \gamma F_{Q+1} + (1 - \gamma) B_{Q+1}$$

Al derivar con respecto al único coeficiente se obtiene:

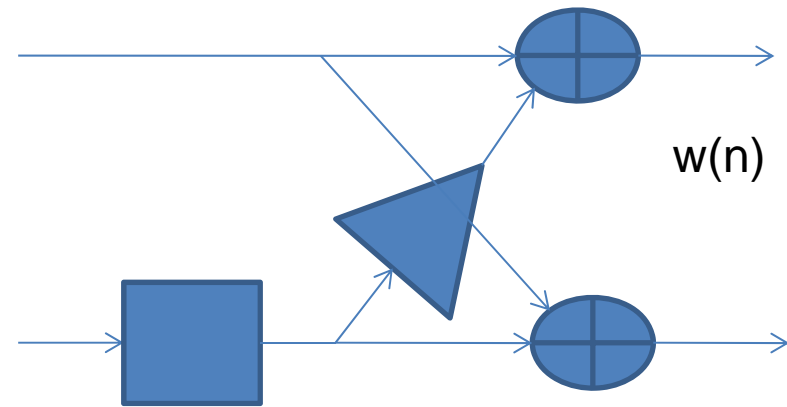
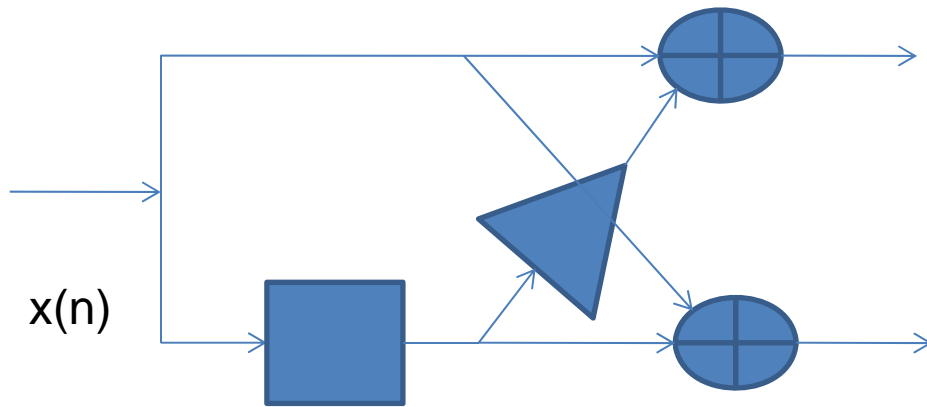
$$K_{Q+1} = -\frac{FB_Q}{(1 - \gamma)F_Q + \gamma B_Q}$$

Dado que a efectos de síntesis se requiere que el coeficiente de reflexión sea en modulo menor que la unidad, la selección que lo garantiza es la de gamma igual a 0.5 (La media, valor esperado, geométrica es siempre inferior a la media aritmética)

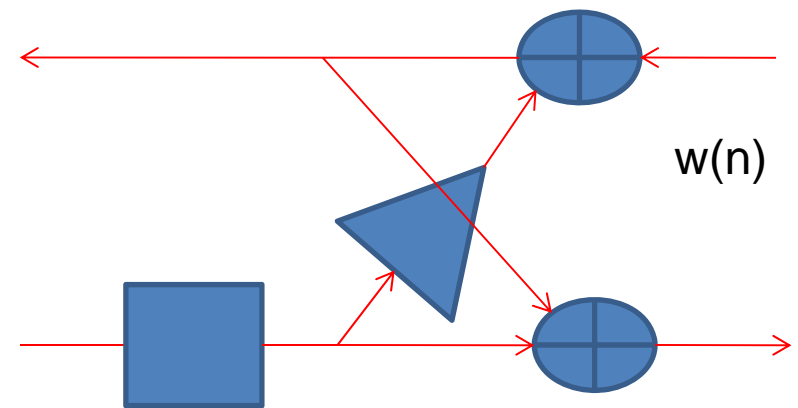
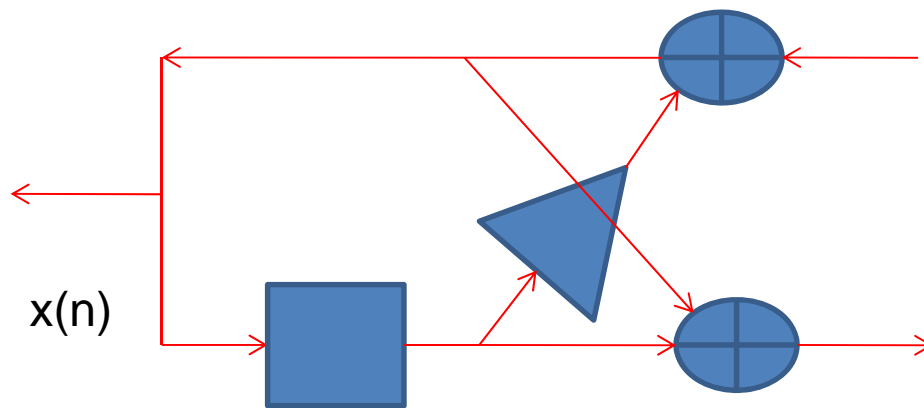
$$K_{Q+1} = -\frac{2FB_Q}{F_Q + B_Q}$$

# Análisis/Síntesis Lattice

ANALISIS



SINTESIS

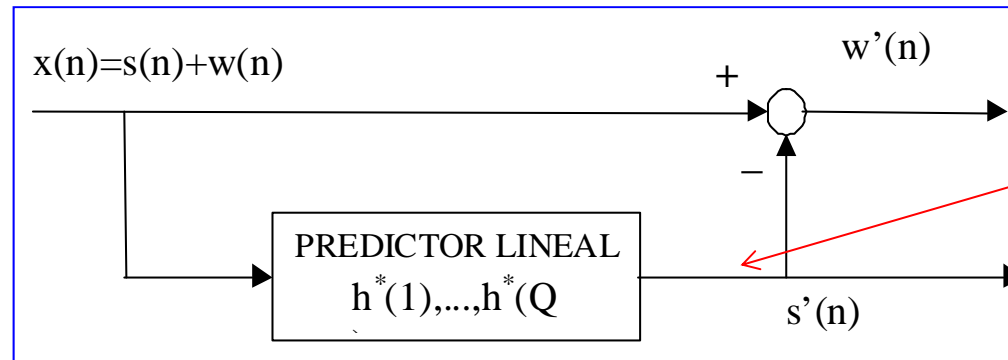


# Aplicaciones: “Line Enhancer”

Es básicamente la mejora de la SNR de una portadora de manera incoherente. Se usa previamente al PLL que regenera completamente la portadora.

La idea es la siguiente:

- El ruido blanco es impredecible
- Una portadora es completamente predecible (error cero)



Lo único que puede lanzar como predicción es la parte de la portadora

La señal prevista es:

$$\hat{x}(n) = \begin{bmatrix} h^*(1) & \dots & h^*(Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-Q) \end{bmatrix} = \underline{h}^H \underline{X}_{n-1} = \underline{h}^H (A \exp(j\omega_o n + \theta) \underline{S} + \underline{w}_{n-1})$$

donde

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \exp(-j\omega_o) \\ \vdots \\ \exp(-j\omega_o Q) \end{bmatrix}$$

Con la restricción de que

$$\underline{h}^H \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{h}^H \underline{1} = 1$$

El error de predicción sería:

$$\xi = E \left\{ \begin{bmatrix} h^*(0) & h^*(1) & \dots & h^*(Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-Q) \end{bmatrix} \right\} = \underline{h}^H \underline{R} \underline{h} \Big|_{min}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} \text{coeficientes optimos } \underline{h} &= \frac{\underline{R}^{-1} \underline{1}}{\underline{1}^H \underline{R}^{-1} \underline{1}} \\ \text{error de predicción } \xi_{min} &= \frac{1}{\underline{1}^H \underline{R}^{-1} \underline{1}} \end{aligned}$$



# Análisis de la mejora introducida por el LE

$$\underline{\underline{R}} = |A|^2 \underline{\underline{S}} \underline{\underline{S}}^H + \sigma^2 \underline{\underline{I}} \quad \underline{\underline{R}}^{-1} = \left( \frac{1}{\sigma^2} \right) \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{|A|^2}{\sigma^2 + Q|A|^2} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{S}}^H \right]$$

$$\underline{\underline{h}} = \left( \frac{1}{\sigma^2} - \frac{|A|^2}{\sigma^2 + Q|A|^2} \underline{\underline{S}} \right) \frac{\sigma^2 + Q|A|^2}{Q|A|^2 / \sigma^2}$$

$$\xi_{min} = \sigma^2 \frac{\sigma^2 + Q|A|^2}{\sigma^2 + (Q-1)|A|^2} = \sigma^2 \frac{1 + Q SNR_{in}}{1 + (Q-1) SNR_{in}}$$

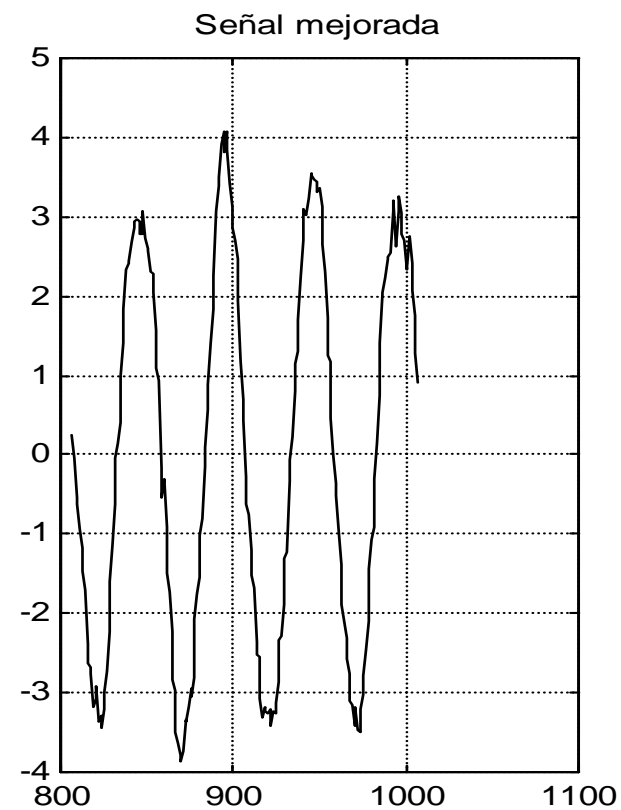
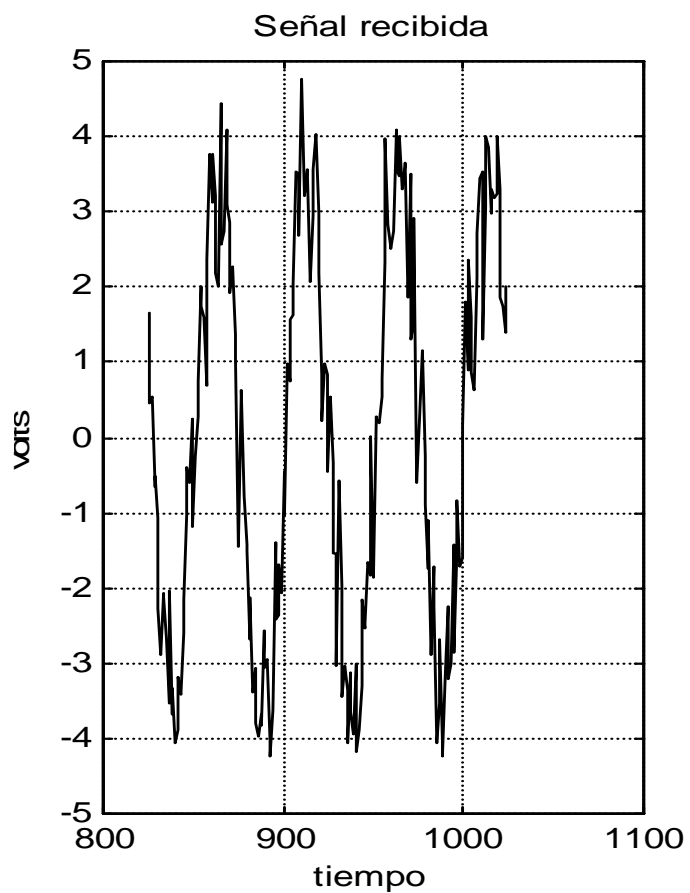
$$SNR_{out} = Q SNR_{in}$$

# Caso practico

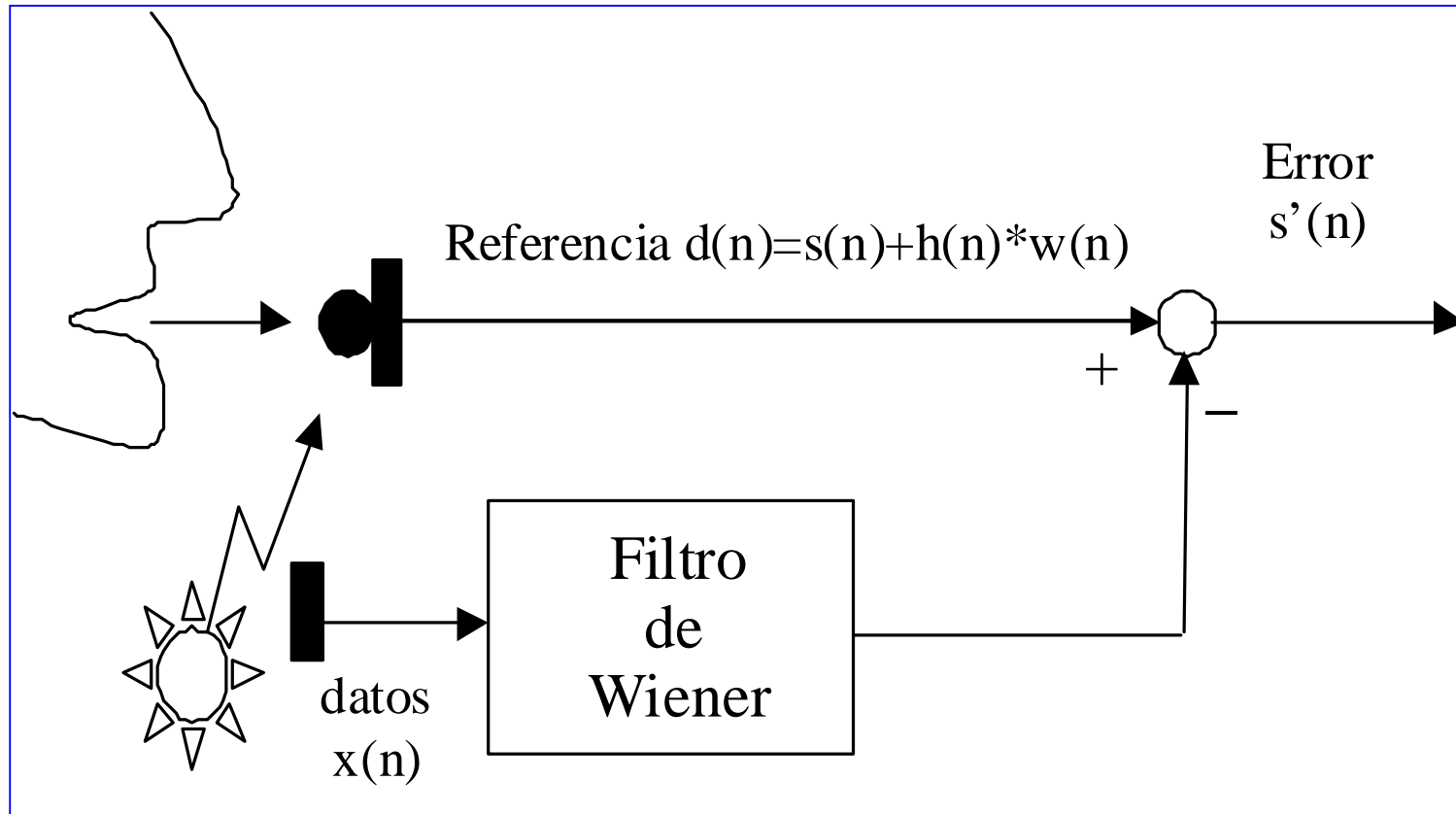
1024 muestras de señal original

SNR de entrada 10 dB

LE de 12 coeficientes

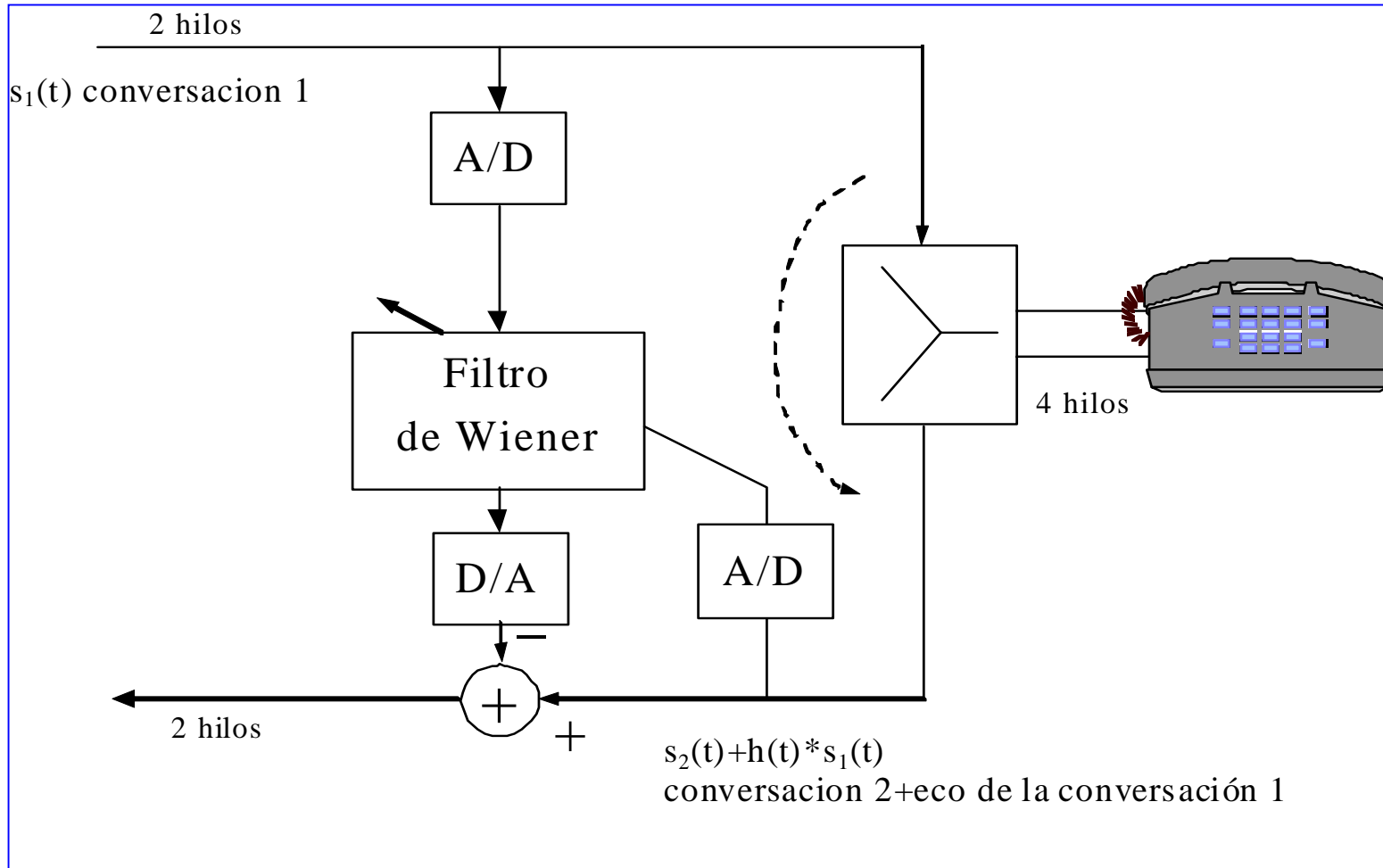


# Canceladores de ruido acústico

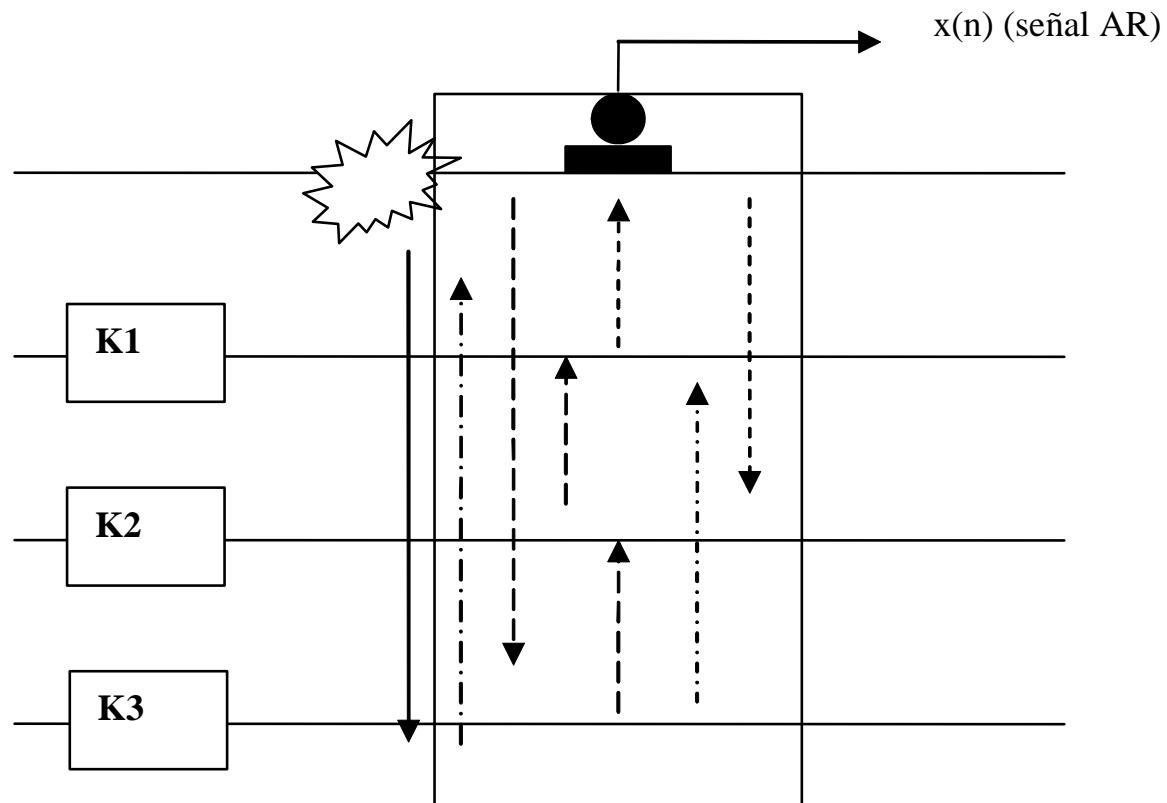


$$\xi_{min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( S_s(\omega) + |H(\omega)|^2 S_n(\omega) \right) (1 - |\gamma(\omega)|^2) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_s(\omega) d\omega$$

# Canceladores de eco "Full Duplex"



# Geofísica (Sistemas reverberantes abiertos en capas)



# SOFTWARE

El programa esta preparado para utilizar directamente

Teclee en la ventana de comandos `spa_gen`

Automáticamente le requerirá en un menú si desea un proceso ARMA, AR, MA o sinusoides en ruido.

Una vez elegido el tipo de señal a analizar, le aparecerá otra ventana con la selección del orden del estimador. Este orden es el del denominador en los métodos paramétricos y el número de coeficientes en MLM y el normalizado, también es el orden de la matriz de correlación en MUSIC

Una vez introducido este valor le aparece en un menú los métodos de análisis espectral disponibles:

Periodograma.- Le aparece en la ventana de comandos el mensaje de que introduzca la longitud del segmento para implementar el método de Welch. La longitud ha de ser menor que la disponible de señal y se recomienda que como máximo sea la mitad de esta.

Correlación.- Estimador sesgado de la correlación. Le preguntara el número de puntos que desea ver en la figura.

LP Levinson. método de Levinson para calcular el predictor lineal y el espectro. En la pantalla le devuelve los coeficientes estimados del modelo AR y la potencia del error de predicción.

MLM Capon.- Automático

NMLM.- Automatico

LP Lattice.- Calculo del modelo AR empleando la red en celosía. Le listara los Parcours y los coeficientes. Puede comparar la mejora entre este procedimiento de calculo de un predictor y el resultado de LP Levinson.

ARMA Máxima entropía.- Le solicitara el orden del numerador. Lista los coeficientes estimados y la potencia del ruido blanco de la entrada.

DURBIN.- método ARMA que también le requiere el orden del numerador. Le lista los coeficientes estimados y la potencia de ruido.

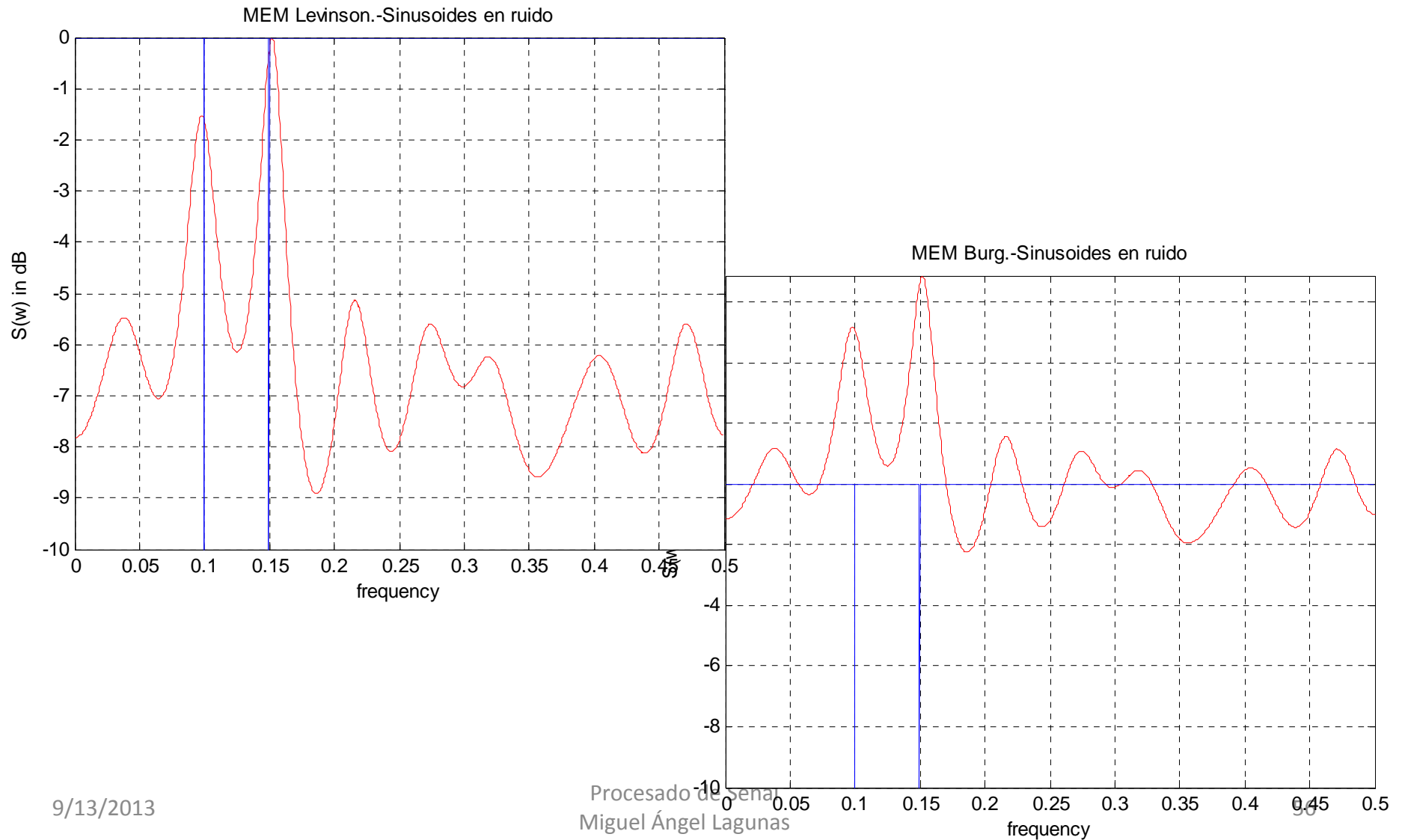
ARMA Pisa.- Igual que ARMA Máxima entropía pero con una estimación del cepstrum en base al logaritmo de la matriz de correlación (Ver notas de procesado). Listado igual al anterior.

KiKa.- método estimación ARMA basado en el cepstrum solamente. La calidad es similar a la de ARMA Máxima entropía.

Music.- Le lista los autovalores y le pide la dimensión del sub-espacio de señal.



# Sinusoides en Ruido (-10 dB.)



9/13/2013

Procesado de Señal  
Miguel Ángel Lagunas



# FINAL



9/13/2013

Procesado de Señal  
Miguel Ángel Lagunas

57